計測自動制御学会論文集
Vol.43, No.3, 1/8（2006）

# 確率ポート・ハミルトン系の受動性に基づく制御†

佐藤訓志*・藤本健治*

# Passivity based control of stochastic port-Hamiltonian systems

Satoshi SATOH* and Kenji FUJIMOTO*

This paper introduces stochastic port-Hamiltonian systems and clarifies some of their properties. Stochastic port-Hamiltonian systems are extension of port-Hamiltonian systems which are used to express various deterministic passive systems. Some properties such as passivity of port-Hamiltonian systems do not generally hold for the stochastic port-Hamiltonian systems. Firstly, we show the necessary and sufficient condition to preserve the stochastic Hamiltonian structure of the original system under time-invariant coordinate transformations. Secondly, we derive the condition to maintain stochastic passivity of the system. Finally, we introduce stochastic generalized canonical transformations and propose a stabilization method based on stochastic passivity.

**Key Words:** Stochastic Hamiltonian systems, Passive stochastic systems, Stochastic stability, Nonlinear stochastic control, Conserved quantities

## 1. はじめに

近年，制御対象を非線形システム全般ではなく，実用上重要な物理システムに限定することで，受動性などの物理的特性を陽に生かした制御手法が盛んに研究されている．物理システムの挙動を記述する表現形式の一つとして，ポート・ハミルトン形式[1),2)]が提案され，力学的なシステムだけでなく，受動的な電気回路や非ホロノミック拘束を持つシステムなども表現できることが示されている[3)]．

一方で，物理システムに対して得られた知見を，不規則外乱が介入する動的システムである確率システムに対して拡張する試みがなされている．例えば文献 4) では，対称性や保存量のような力学系において重要な概念を，ストラトノヴィッチ型，伊藤型確率微分方程式[5)]で記述される確率力学系に拡張している．文献 6),7) では，非負優マルチンゲールの性質を持つ関数を確率リアプノフ関数とした確率安定性の定理が示されている．また文献 8) では受動性の概念を，**確率受動性**として確率システムに拡張しており，確定システムにおける受動性に基づく安定化手法[9),10)]と同様の手法で確率漸近安定化が達成できる．

伊藤型確率微分方程式の解過程は，確率解析において重要なマルチンゲールであるが[5),11)]，著者の知る限り非自律系の伊藤型確率微分方程式で記述される確率ハミルトン系に関する研究はほとんどない．そこで本論文の目的は，確定システムにおけるポート・ハミルトン系を，伊藤型確率微分方程式を用いた**確率ポート・ハミルトン系**へ拡張し，さらにこの系が持つ性質を明らかにすることである．第一に，ポート・ハミルトン系は任意の時不変の座標変換のもとで不変であるが，確率ポート・ハミルトン系では成立しないため，これを満たす座標変換の必要十分条件を導く．第二に，確率ポート・ハミルトン系が確率受動性を有するための必要十分条件を導く．非線形確率システムの安定化は一般に困難であるが，確率受動性を利用すれば，出力フィードバックという非常に簡単な制御器で確率安定化が達成できる．そのため，この性質は本論文においても重要な役割を果たす．第三に，座標変換だけでは確率受動性をもたないシステムに対して，フィードバック変換を加えることで確率受動的にすることを考える．文献 12) では，ポート・ハミルトン系の性質を保存する座標変換とフィードバック変換の組である一般化正準変換が提案されており，本論文では，これを**確率一般化正準変換**へと拡張する．本論文で示すこれらの性質は，確定システムにおける結果を特別な場合として含んでいる．最後に，確率受動性に基づく確率安定化手法を示す．この方法は制御対象である確率ポート・ハミルトン系に確率一般化正準変換を施し，確率受動性を持つ新たな確率ポート・ハミルトン系に変換した後，出力フィードバックにより確率漸近安定化を達成するものである．実際の機械システムにおいては，観測ノイズによりシステムの挙動が不安定化する問題もあり[13)]，本論文のような確率力学系からのアプローチは実システムの制御においても有効であると考えられる．

---

† 第 8 回計測自動制御学会制御部門大会で発表 (2008.3)
* 名古屋大学 大学院 工学研究科
* Department of Mechanical Science and Engineering, Graduate School of Engineering, Nagoya University, Fro-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603, Japan

## 2. 確率ポート・ハミルトン系

確定システムの分野では，古典力学における Hamilton の正準方程式で表されるハミルトン系[14]に，制御入力と摩擦項を考慮したポート・ハミルトン系 (1) が提案されている[1),2)]．

$$\begin{cases} \dot{x} = (J(x) - R(x)) \dfrac{\partial H(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} + g(x)u \\ y = g(x)^{\mathrm{T}} \dfrac{\partial H(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{1}$$

そこで本論文では，このシステムを伊藤型確率微分方程式で表される確率力学系に拡張した次式のシステムを考える．

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = (J(x) - R(x)) \dfrac{\partial H(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} \mathrm{d}t + g(x)u\,\mathrm{d}t + h(x)\,\mathrm{d}w \\ y = g(x)^{\mathrm{T}} \dfrac{\partial H(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{2}$$

ここで，$x(t) \in \mathbb{R}^n$，$u(t), y(t) \in \mathbb{R}^m$ である．ハミルトン関数 $H(x) \in \mathbb{R}$ は滑らかな関数であり，システムの全エネルギを表す．構造行列 $J(x)$ は歪対称行列，散逸行列 $R(x)$ は半正定対称行列とし，$g, h$ は滑らかな関数とする．また，$w(t) \in \mathbb{R}^r$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上の標準ウィーナ過程である．ここで $\Omega$ は標本空間，$\mathcal{F}$,$\mathcal{P}$ はそれぞれ $\Omega$ 上の $\sigma$-加法族と確率測度を表す．本論文ではこのシステム (2) を**確率ポート・ハミルトン系**とよぶ(注 1)．

以降では，明示的な記述がない限り，ポート・ハミルトン系は確定システム (1) を，確率ポート・ハミルトン系は確率システム (2) をそれぞれ指すものとする．また，$[\cdot]^{-1}$ は逆行列を表し，それ以外の $\cdot^{-1}$ は逆変換を表す．さらに，本論文では (漸近) 安定性は全て付録 A で定義される確率 (漸近) 安定性の意味で用いるものとする．

ポート・ハミルトン系 (1) における時不変の座標変換のもとでの不変性は次のように定義される．

**【定義】** ポート・ハミルトン系 (1) を考える．時不変の座標変換 $\bar{x} = \Phi(x)$ に対して，歪対称行列 $\bar{J}(\bar{x})$，半正定対称行列 $\bar{R}(\bar{x})$ と滑らかな関数 $\bar{g}(\bar{x})$ が存在して，変換後のシステムが次式を満たすとき，$\bar{x} = \Phi(x)$ のもとで不変であるという．

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \left(\bar{J}(\bar{x}) - \bar{R}(\bar{x})\right) \dfrac{\partial H(\Phi^{-1}(\bar{x}))}{\partial \bar{x}}^{\mathrm{T}} + \bar{g}(\bar{x})u \\ y = \bar{g}(\bar{x})^{\mathrm{T}} \dfrac{\partial H(\Phi^{-1}(\bar{x}))}{\partial \bar{x}}^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{3}$$

文献 12) より，以下の補題が知られている．

［**補題 1**］ [12)] ポート・ハミルトン系 (1) は任意の時不変の座標変換のもとで不変である．

しかしながら，確率ポート・ハミルトン系 (2) では補題 1 と同様の主張は成り立たない．そこで，以下の定理を示す．

《**定理 1**》 確率ポート・ハミルトン系 (2) が，時不変の座標変換 $\bar{x} = \Phi(x)$ のもとで不変である(注 2)ための必要十分条件は，ある歪対称行列 $K(x)$ と，$R(x) + S(x)$ が半正定対称行列となるような，ある対称行列 $S(x)$ が存在し，次式が成立することである．ただし，$\mathrm{tr}\{\cdot\}$ は行列のトレースを表し，$(\cdot)^i$ は $(\cdot)$ の $i$ 行目の成分とする．

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi^i}{\partial x} \right)^{\mathrm{T}} h h^{\mathrm{T}} \right\} = \frac{\partial \Phi^i}{\partial x} (K - S) \frac{\partial H}{\partial x}^{\mathrm{T}} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4}$$

**証明** まず必要性を証明するために，座標変換後のシステムが (2) 式の形で表されるとき，(4) 式の条件が成立することを示す．変換後のシステムは，伊藤の公式 (付録 B) を用いて次式のように計算できる．

$$\mathrm{d}\bar{x}^i = \left[ \frac{\partial \Phi^i}{\partial x} (J - R) \frac{\partial H}{\partial x}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi^i}{\partial x} \right)^{\mathrm{T}} h h^{\mathrm{T}} \right\} \right] \mathrm{d}t + \frac{\partial \Phi^i}{\partial x} g u\,\mathrm{d}t + \frac{\partial \Phi^i}{\partial x} h\,\mathrm{d}w \tag{5}$$

ここで，システムが変換後の座標 $\bar{x}$ 上でも (2) 式の形で表されるため，任意の $u$ と $w$ において次式を満たす歪対称行列 $\bar{J}(\bar{x})$，半正定対称行列 $\bar{R}(\bar{x})$ と滑らかな関数 $\bar{g}(\bar{x})$ が存在する．

R.H.S. of Eq. (5)

$$\equiv \left[ (\bar{J}(\bar{x}) - \bar{R}(\bar{x})) \frac{\partial H(\Phi^{-1}(\bar{x}))}{\partial \bar{x}}^{\mathrm{T}} \right]^i \mathrm{d}t + \left[ \bar{g}(\bar{x}) u \right]^i \mathrm{d}t + \left[ \bar{h}(\bar{x})\,\mathrm{d}w \right]^i \tag{6}$$

これは次式の成立を意味する．

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} g \equiv \bar{g}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} h \equiv \bar{h} \tag{7}$$

また，(6) 式の第一項は次のように計算できる．

$$\begin{aligned} &\left[ (\bar{J}(\bar{x}) - \bar{R}(\bar{x})) \frac{\partial H(\Phi^{-1}(\bar{x}))}{\partial \bar{x}}^{\mathrm{T}} \right]^i \\ &= \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]^{-1} (\bar{J} - \bar{R}) \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]^{-\mathrm{T}} \frac{\partial \Phi}{\partial x}^{\mathrm{T}} \frac{\partial H(\Phi^{-1}(\bar{x}))}{\partial \bar{x}}^{\mathrm{T}} \right]^i \\ &= \frac{\partial \Phi^i}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]^{-1} (\bar{J} - \bar{R}) \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]^{-\mathrm{T}} \frac{\partial H(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{8}$$

よって (5),(6),(8) 式より，次式が成立する．

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi^i}{\partial x} \right)^{\mathrm{T}} h h^{\mathrm{T}} \right\} = \frac{\partial \Phi^i}{\partial x} \left[ \left( \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]^{-1} \bar{J} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]^{-\mathrm{T}} - J \right) \right.$$

(注 1) 本論文では後述する確率受動性[8)]が重要な役割を果たす．文献 8) では，(12) 式のような状態依存型の不規則外乱を含むシステムのみを対象とするため，本論文でも同じ問題設定とし，制御依存型外乱は考えていない．

(注 2) 確率システムにおける不変性も，確定システムの定義 (3) と同様に，変換後の座標上でシステムが (2) 式の形式で表されることをいうものとする．

$$-\left(\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]^{-1}\bar{R}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]^{-\mathrm{T}}-R\right)\Bigg]\frac{\partial H(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

ここで，$K(x), S(x)$ を次式のように定義する．

$$K(x):=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]^{-1}\bar{J}(\Phi^{-1}(x))\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]^{-\mathrm{T}}-J(x),$$

$$S(x):=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]^{-1}\bar{R}(\Phi^{-1}(x))\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]^{-\mathrm{T}}-R(x)$$

$J(x), \bar{J}(\Phi^{-1}(x))$ がそれぞれ歪対称行列であるから，$K(x)$ も歪対称行列となる．また，$R(x)$ が対称行列，$\bar{R}(\Phi^{-1}(x))$ が半正定対称行列であることから，$S(x)$ は対称行列，$R(x)+S(x)$ が半正定対称行列となり，定理の仮定を満たす．よって，(9) 式は (4) 式と一致することから必要性が示された．

つぎに十分性を示すために，(4) 式の条件が成立するとき，座標変換後のシステムが (2) 式の形で表されることを示す．まず出力 $y$ は変換後の座標上で次式のように計算できる．

$$\begin{aligned} y &= g^{\mathrm{T}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]^{\mathrm{T}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]^{-\mathrm{T}}\frac{\partial H}{\partial x}^{\mathrm{T}} \\ &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}g\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial\Phi^{-1}(\bar{x})}{\partial\bar{x}}\right)^{\mathrm{T}} = \bar{g}^{\mathrm{T}}(\bar{x})\frac{\partial H}{\partial\bar{x}}^{\mathrm{T}}(\bar{x}) \end{aligned}$$

よって，変換後も (2) 式の形で表される．

つぎに，変換後のシステムのダイナミクスは，(4) 式を (5) 式に代入することで次式のように計算できる．

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{x}^i &= \left[\frac{\partial\Phi^i}{\partial x}(J-R)\frac{\partial H}{\partial x}^{\mathrm{T}}+\frac{\partial\Phi^i}{\partial x}(K-S)\frac{\partial H}{\partial x}^{\mathrm{T}}\right]\mathrm{d}t \\ &\quad +\frac{\partial\Phi^i}{\partial x}gu\,\mathrm{d}t+\frac{\partial\Phi^i}{\partial x}h\,\mathrm{d}w \\ &= \Bigg[\Bigg(\underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial x}(J+K)\frac{\partial\Phi}{\partial x}^{\mathrm{T}}}_{=:\bar{J}}-\underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial x}(R+S)\frac{\partial\Phi}{\partial x}^{\mathrm{T}}}_{=:\bar{R}}\Bigg) \\ &\quad \times\frac{\partial H(\Phi^{-1}(\bar{x}))}{\partial\bar{x}}^{\mathrm{T}}\Bigg]^i\mathrm{d}t+\underbrace{\frac{\partial\Phi^i}{\partial x}g}_{=:\bar{g}^i}u\,\mathrm{d}t+\underbrace{\frac{\partial\Phi^i}{\partial x}h}_{=:\bar{h}^i}\mathrm{d}w \\ &=: \left[(\bar{J}(\bar{x})-\bar{R}(\bar{x}))\frac{\partial H(\Phi^{-1}(\bar{x}))}{\partial\bar{x}}^{\mathrm{T}}\right]^i\mathrm{d}t+\left[\bar{g}(\bar{x})u\right]^i\mathrm{d}t \\ &\quad +\left[\bar{h}(\bar{x})\,\mathrm{d}w\right]^i \end{aligned} \tag{10}$$

定理の条件から，$\bar{J}(\bar{x})$ は歪対称行列であり，$\bar{R}(\bar{x})$ は半正定対称行列である．よって，(10) 式より十分性が示された．■

（注意）　定理 1 を確定システム (1) に適用することを考える．この場合，$h\equiv 0$ が成立し，(4) 式は次式のようになる．

$$\frac{\partial\Phi^i}{\partial x}(K-S)\frac{\partial H}{\partial x}^{\mathrm{T}}=0,\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{11}$$

ここで，$K(x)\equiv 0$，$S(x)\equiv 0$ と選ぶと，(11) 式は任意の $H$ と $\Phi$ に関して常に成立する．これは，任意の時不変の座標変換はポート・ハミルトン系の構造を保存することを意味し，定理 1 が補題 1 を特別な場合として含むことを示している．

つぎに，ポート・ハミルトン系の受動性に関して以下の補題が知られている．

**［補題 2］**　[2] ハミルトン関数 $H(x)$ が半正定であるとき，ポート・ハミルトン系 (1) は受動的である．さらに，$R(x)\equiv 0$ であればシステム (1) は無損失である．

確定システムにおける受動性に対応するものとして，文献 8) では，確率システムにおける**確率受動性**が提案されている．非線形確率システムの安定化は一般に困難であるが，確率受動性を利用すれば，出力フィードバックという非常に簡単な制御器で確率安定化が達成できる．そのため，この性質は本論文においても重要な役割を果たす．

**【定義】**　[8] 次式で表される伊藤型確率力学系を考える．

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = f(x,u)\,\mathrm{d}t+h(x)\,\mathrm{d}w \\ y = s(x,u) \end{cases} \tag{12}$$

ただし，$x(t)\in\mathbb{R}^n$，$u(t), y(t)\in\mathbb{R}^m$ であり，$w(t)\in\mathbb{R}^r$ は確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の標準ウィーナ過程であり，$f, h, s$ は滑らかな関数とする．

確率システム (12) が確率受動的であるとは，蓄積関数とよばれるある半正定関数 $V(x)$ が存在して，全ての $(x,u)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ において次式が成立することである．

$$\mathcal{L}V(x)\le s(x,u)^{\mathrm{T}}u \tag{13}$$

ここで，$\mathcal{L}(\cdot)$ は次式で定義される微分生成作用素である．

$$\mathcal{L}(\cdot):=\frac{\partial(\cdot)}{\partial x}f+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}hh^{\mathrm{T}}\right\} \tag{14}$$

確率ポート・ハミルトン系では，補題 2 と同様の主張は必ずしも成り立たない．そこで，(13) 式で定義した確率ポート・ハミルトン系の確率受動性に関する以下の補題を示す．

**［補題 3］**　ハミルトン関数 $H(x)$ が半正定であるとき，確率ポート・ハミルトン系 (2) が $H(x)$ を蓄積関数として確率受動的であるための必要十分条件は次式が成立することである．

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H(x)}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}h(x)h(x)^{\mathrm{T}}\right\}\le\frac{\partial H}{\partial x}R\frac{\partial H}{\partial x}^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

**証明**　まず必要性を証明するために，システムが確率受動的であるとき，(15) 式の条件が成立することを示す．$\mathcal{L}H(x)$ を計算すると次式のようになる．

$$\begin{aligned} \mathcal{L}H(x) &= \frac{\partial H}{\partial x}\left((J-R)\frac{\partial H}{\partial x}^{\mathrm{T}}+gu\right) \\ &\quad +\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}hh^{\mathrm{T}}\right\} \\ &= -\frac{\partial H}{\partial x}R\frac{\partial H}{\partial x}^{\mathrm{T}}+y^{\mathrm{T}}u+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}hh^{\mathrm{T}}\right\} \end{aligned} \tag{16}$$

ただし，$\frac{\partial H}{\partial x}J\frac{\partial H}{\partial x}^{\mathrm{T}}$ は歪対称行列 $J$ の二次形式であり 0 となることを利用している．確率受動性の定義 (13) 式より

$$\mathcal{L}H(x) \leq y^{\mathrm{T}} u \tag{17}$$

が成立するため，(16),(17) 式より，(15) 式が示される．

十分性の証明は (15) 式と (16) 式から (17) 式が導かれ，確率受動性の定義 (13) 式より示される． ■

［系 1］ 確率ポート・ハミルトン系 (2) を考え，$R(x) \equiv 0$ と仮定する．このとき，このシステムが確率無損失である(注 3)ための必要十分条件は次式が成立することである．

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H(x)}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} h(x)h(x)^{\mathrm{T}}\right\} = 0 \tag{18}$$

システムが確率無損失ならば，$u \equiv 0$ のときハミルトン関数 $H(x)$ はこのシステムの保存量となる．

（注意） 補題 3 と系 1 を確定システム (1) に適用することを考える．$h \equiv 0$ とすると，補題 3 と系 1 の結果は，補題 2 と同じ結果となり，確定システムにおける結果を確率システムを含む形に一般化したものとなっている．

## 3. 確率一般化正準変換による確率受動性の回復

文献 12) では，ポート・ハミルトン系の性質を保存する座標変換とフィードバック変換の組である一般化正準変換が提案されている．そこで本章では，座標変換だけでは確率受動性をもたないシステムに対して，フィードバック変換を加えることで確率受動的にすることを考える．まず，一般化正準変換を確率ポート・ハミルトン系に対して拡張し，さらに変換後のシステムがハミルトン系の構造を保存するだけでなく，確率受動的であるための条件を示す．

まず**確率一般化正準変換**を定義し，これが満たすべき条件を与える．

**【定義】** 確率ポート・ハミルトン系 (2) に対する確率一般化正準変換とは次式で与えられる変換の組であり，変換後の座標 $\bar{x}$ 上における入出力 $\bar{u} \mapsto \bar{y}$ のダイナミクスが，$\bar{H}$ をハミルトン関数とする確率ポート・ハミルトン系となるものをいう．

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \Phi(x) \\
\bar{H} &= H(x) + U(x) \\
\bar{y} &= y + \alpha(x) \\
\bar{u} &= u + \beta(x)
\end{aligned} \tag{19}$$

ただし，$U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は適当な関数とする．

《**定理 2**》 確率ポート・ハミルトン系 (2) を考える．与えられた $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対して，(19) 式の変換の組が確率一般化正準変換となるための必要十分条件は，ある歪対称行列 $P(x)$ と，$R(x) + Q(x)$ が半正定対称行列となるようなある対称行列 $Q(x)$ と，座標変換 $\Phi(x)$ が存在し，次式を満たすことである．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} hh^{\mathrm{T}}\right\} \\
&= \frac{\partial \Phi^i}{\partial x}\left[(J-R)\frac{\partial U}{\partial x}^{\mathrm{T}} + g\beta + (P-Q)\frac{\partial (H+U)}{\partial x}^{\mathrm{T}}\right] \\
&\qquad (i = 1, 2, \cdots, n)
\end{aligned} \tag{20}$$

また，このとき出力の変換である $\alpha(x)$ は次式で与えられる．

$$\alpha(x) = g(x)^{\mathrm{T}} \frac{\partial U(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

**証明** まず必要性を証明するために，$U$ と $\beta$ に関する一般化正準変換となるような座標変換 $\Phi$ が存在し，システムが変換後の座標 $\bar{x}$ 上でも確率ポート・ハミルトン系 (2) の形で表されるとき，(20) 式と (21) 式が成立することを示す．

定理 1 の場合と同様に，変換後のシステムは次式のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\bar{x}^i = &\left[\frac{\partial \Phi^i}{\partial x}(J-R)\frac{\partial H}{\partial x}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} hh^{\mathrm{T}}\right\}\right]\mathrm{d}t \\
&+ \frac{\partial \Phi^i}{\partial x} gu\,\mathrm{d}t + \frac{\partial \Phi^i}{\partial x} h\,\mathrm{d}w
\end{aligned} \tag{22}$$

ここで，システムが確率一般化正準変換後の座標 $\bar{x}$ 上でも確率ポート・ハミルトン系 (2) の形で表されるため，任意の $u$ と $w$ において次式が成立する．

$$\begin{aligned}
&\text{R.H.S. of Eq. (22)} \\
&\equiv \left[(\bar{J}-\bar{R})\frac{\partial \bar{H}(\Phi^{-1}(\bar{x}))}{\partial \bar{x}}^{\mathrm{T}}\right]^i \mathrm{d}t + \left[\bar{g}\bar{u}\right]^i \mathrm{d}t + \left[\bar{h}\,\mathrm{d}w\right]^i \\
&= \frac{\partial \Phi^i}{\partial x}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]^{-1}(\bar{J}-\bar{R})\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]^{-\mathrm{T}}\frac{\partial (H(x)+U(x))}{\partial x}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}t \\
&\quad + \left[\bar{g}(u+\beta)\right]^i \mathrm{d}t + \left[\bar{h}\,\mathrm{d}w\right]^i
\end{aligned} \tag{23}$$

これは次式の成立を意味する．

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} g \equiv \bar{g}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} h \equiv \bar{h} \tag{24}$$

(22),(23),(24) 式より，次式が成立する．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} hh^{\mathrm{T}}\right\} \\
&= \frac{\partial \Phi^i}{\partial x}\Bigg[\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]^{-1}(\bar{J}-\bar{R})\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]^{-\mathrm{T}}\frac{\partial (H+U)}{\partial x}^{\mathrm{T}} \\
&\qquad - (J-R)\frac{\partial H}{\partial x}^{\mathrm{T}} + g\beta\Bigg]
\end{aligned} \tag{25}$$

ここで，歪対称行列 $P(x)$ と対称行列 $Q(x)$ を次式で定義する．

$$\begin{aligned}
P(x) &:= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]^{-1}\bar{J}(\Phi^{-1}(x))\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]^{-\mathrm{T}} - J(x), \\
Q(x) &:= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]^{-1}\bar{R}(\Phi^{-1}(x))\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]^{-\mathrm{T}} - R(x)
\end{aligned} \tag{26}$$

(注 3) 本論文では確定システムに従い，(13) 式の不等号'≤' を等号'=' で置き換えたものを確率無損失であると定義する．

$J(x), \bar{J}(\Phi^{-1}(x))$ がそれぞれ歪対称行列であるから，$P(x)$ も歪対称行列となる．また，$R(x)$ が対称行列，$\bar{R}(\Phi^{-1}(x))$ が半正定対称行列であることから，$Q(x)$ は対称行列，$R(x)+Q(x)$ が半正定対称行列となり，定理の条件を満たす．(26) 式を (25) 式に代入することで，直ちに (20) 式を得ることができる．

最後に，$\alpha$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\alpha &= \bar{g}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \bar{H}(\Phi^{-1}(\bar{x}))}{\partial \bar{x}}^{\mathrm{T}} - g^{\mathrm{T}}\frac{\partial H(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} \qquad (27)\\ &= g^{\mathrm{T}}\frac{\partial \Phi}{\partial x}^{\mathrm{T}}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]^{-\mathrm{T}}\frac{\partial (H+U)}{\partial x}^{\mathrm{T}} - g^{\mathrm{T}}\frac{\partial H(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} = g^{\mathrm{T}}\frac{\partial U}{\partial x}^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

よって，必要性が示された．

つぎに十分性を証明するために．(20),(21) 式が成立するとき，確率一般化正準変換後のシステムが (2) 式の形で表されることを示す．

システムのダイナミクスは，(20) 式を (22) 式に代入することで次式のように計算できる．

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\bar{x}^i &= \left[\frac{\partial \Phi^i}{\partial x}(J-R)\frac{\partial H}{\partial x}^{\mathrm{T}} + \frac{\partial \Phi^i}{\partial x}\left[(J-R)\frac{\partial U}{\partial x}^{\mathrm{T}} + g\beta \right.\right.\\ &\quad \left.\left. +(P-Q)\frac{\partial (H+U)}{\partial x}^{\mathrm{T}}\right]\right]\mathrm{d}t + \frac{\partial \Phi^i}{\partial x}gu\,\mathrm{d}t + \frac{\partial \Phi^i}{\partial x}h\,\mathrm{d}w\\ &= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big((J+P)-(R+Q)\Big)\frac{\partial \Phi}{\partial x}^{\mathrm{T}}\right.\\ &\quad \left.\times\frac{\partial (H(\Phi^{-1}(\bar{x}))+U(\Phi^{-1}(\bar{x})))}{\partial \bar{x}}^{\mathrm{T}}\right]^i \mathrm{d}t\\ &\quad +\frac{\partial \Phi^i}{\partial x}g(u+\beta)\,\mathrm{d}t + \frac{\partial \Phi^i}{\partial x}h\,\mathrm{d}w \qquad (28)\end{aligned}$$

(28) 式より $\bar{J}, \bar{R}, \bar{g}, \bar{h}$ はそれぞれ次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\bar{J}(\bar{x}) &= \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}(J(x)+P(x))\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}}\Bigg|_{x=\Phi^{-1}(\bar{x})}\\ \bar{R}(\bar{x}) &= \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}(R(x)+Q(x))\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}}\Bigg|_{x=\Phi^{-1}(\bar{x})}\\ \bar{g}(\bar{x}) &= \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}g(x)\Bigg|_{x=\Phi^{-1}(\bar{x})}, \bar{h}(\bar{x}) = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}h(x)\Bigg|_{x=\Phi^{-1}(\bar{x})} \qquad (29)\end{aligned}$$

定理の条件より，$\bar{J}(\bar{x})$ は歪対称行列であり，$\bar{R}(\bar{x})$ は半正定対称行列となる．

(21) 式より，出力 $\bar{y}$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\bar{y} &= g^{\mathrm{T}}\frac{\partial H(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}} + g^{\mathrm{T}}\frac{\partial U(x)}{\partial x}^{\mathrm{T}}\\ &= g^{\mathrm{T}}\frac{\partial \Phi}{\partial x}^{\mathrm{T}}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]^{-\mathrm{T}}\frac{\partial (H+U)}{\partial x}^{\mathrm{T}}\\ &= \bar{g}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \bar{H}(\Phi^{-1}(\bar{x}))}{\partial \bar{x}}^{\mathrm{T}} \qquad (30)\end{aligned}$$

よって，(28),(29),(30) 式より十分性が示された．■

（注意）　定理 2 を確定システム (1) に適用することを考える．この場合，$h \equiv 0$ が成立し，(20) 式は次式のようになる．

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\left[(J-R)\frac{\partial U}{\partial x}^{\mathrm{T}} + g\beta + (P-Q)\frac{\partial (H+U)}{\partial x}^{\mathrm{T}}\right] = 0 \qquad (31)$$

実は，(31) 式は，文献 15) の定理 1 (i) における条件式と一致する．文献 15) の定理 1 (i) は，文献 12) の結果にさらに摩擦項を考慮して一般化されたものである．これは，時不変の場合に限定すると，定理 2 が確定システムに対する結果を特別な場合として含むことを示している．

最後に，補題 3 と定理 2 より，確率一般化正準変換 (19) 後のシステムが確率受動的であるための条件を明らかにし，確率受動性を用いた安定化定理を示す．

**《定理 3》**　確率ポート・ハミルトン系 (2) に対して $H+U$ が半正定となる $U$ および $\beta$ が与えられ，定理 2 に従い確率一般化正準変換が施されたものとする．このとき，変換後のシステムが $H+U$ を蓄積関数とする確率受動的であるための必要十分条件は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial (H+U)}{\partial x}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]^{-1}\right)^{\mathrm{T}} h(x)h(x)^{\mathrm{T}}\frac{\partial \Phi}{\partial x}^{\mathrm{T}}\right\}\\ &\qquad \le \frac{\partial (H+U)}{\partial x}(R+Q)\frac{\partial (H+U)}{\partial x}^{\mathrm{T}} \qquad (32)\end{aligned}$$

もし $H+U$ が正定であり，さらに次式で定義される集合が $\Gamma \cap \Omega = \{0\}$ を満たすならば，直結フィードバック $\bar{u} = -\bar{y}$ は変換後のシステムの原点を確率漸近安定化する．

$$\begin{aligned}\Lambda &= \mathrm{span}\{\mathrm{ad}_{\bar{f}_0}^k \bar{g}_i | 0 \le k \le n-1, 1 \le i \le m\}\\ \Gamma &= \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n | \mathcal{L}_0^k(H+U) = 0,\ k = 1, \cdots, r\}\\ \Omega &= \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n | \mathcal{L}_0^k L_\lambda(H+U) = 0,\\ &\qquad \forall\lambda \in \Lambda,\ k = 0, \cdots, r-2\}, \qquad (33)\end{aligned}$$

ここで，$\bar{f}_0 := (\bar{J}(\bar{x}) - \bar{R}(\bar{x}))\frac{\partial \bar{H}(\bar{x})}{\partial \bar{x}}^{\mathrm{T}}$ であり，$\bar{g}_i$ は $\bar{g}$ の $i$ 列目を表す．また，作用素 $\mathcal{L}_0$ は，(14) 式の $\mathcal{L}$ において $f$ を $\bar{f}_0$ で置き換えたのもである．

**証明**　まず，定理の前半の主張を示す．補題 3 より，確率一般化正準変換を施した後のシステムが (15) 式を満たせば良い．つまり，次式が必要十分条件である．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{\partial \bar{H}(\Phi^{-1}(\bar{x}))}{\partial \bar{x}}\right)^{\mathrm{T}}\bar{h}(\bar{x})\bar{h}(\bar{x})^{\mathrm{T}}\right\}\\ &\qquad \le \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}}\bar{R}\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}}^{\mathrm{T}} \qquad (34)\end{aligned}$$

ここで，次式が成立することに注意する．

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{\partial \bar{H}(\Phi^{-1}(\bar{x}))}{\partial \bar{x}}\right)^{\mathrm{T}}\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{H}(x)}{\partial x}\left[\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}\right]^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\left[\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}\right]^{-1} \qquad (35)\end{aligned}$$

すると，(29),(34),(35) 式より，(32) 式が示される．

後半の主張は，文献 8) の Corollary 4.7 を適用することで直

ちに示されるため，ここでは証明の概略を示す．確率受動性の定義 (13) 式と $\bar{u} = -\bar{y}$ より，$\mathcal{L}\bar{H} \leq 0$ となり，このとき確率システムにおけるラサールの不変性原理 (文献 8) の Theorem 2.5) より，状態は $\mathcal{L}\bar{H} = 0$ を満たす集合内の最大不変集合に収束する．$\mathcal{L}\bar{H} = 0$ と (13) 式から $\bar{y} = 0$ であり，またこのとき $\bar{u} = 0$ から $\mathcal{L}_0\bar{H} = 0$ となる．$\bar{y}^i = \mathcal{L}_{\bar{g}_i}\bar{H}$ $(1 \leq i \leq m)$ であることに注意して，$\bar{y}^i = 0$ と $\mathcal{L}_0\bar{H} = 0$ に繰り返し伊藤の公式を適用することで，最大不変集合として $\Gamma \cap \Omega$ を得るが，これは仮定より原点のみであり題意が示される． ■

## 4. 数 値 例

本章では，ノイズを含む非ホロノミック系として転がるコインを考え，提案手法を適用する．

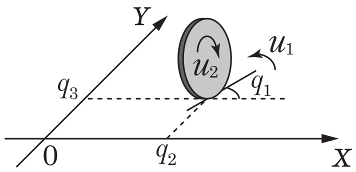


**Fig. 1** A rolling coin

Fig.1 のように，平面上に直交座標 $X$-$Y$ を取り，コインの進行方向の角度を $q_1$，位置を $(X, Y) = (q_2, q_3)$ で表し，$q_1$ の角運動量を $p_1$，コインの進行方向の回転角運動量を $p_2$ で表す．入力は，進行方向の角度を増やす回転トルクを $u_1$，進行方向の回転トルクを $u_2$ とする．コインの半径や各軸回りの慣性モーメントなどを全て 1 に規格化すると，次式のパラメータを持つ確率ポート・ハミルトン系 (2) として表される．ただし，$q = (q_1, q_2, q_3)^{\mathrm{T}}, p = (p_1, p_2)^{\mathrm{T}}, x = (q^{\mathrm{T}}, p^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}, H = (1/2)p^{\mathrm{T}}p$ とし，$O_{ij}$ は $i$ 行 $j$ 列の零行列，$I_i$ を $i$ 行 $i$ 列の単位行列を表す．また，このモデルの詳細は文献 16) に準ずる．

$$J(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(q_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(q_1) \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} O_{32} \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad h(x) = \begin{pmatrix} O_{32} \\ \mathrm{diag}\{h_1(x), h_2(x)\} \end{pmatrix}$$

ただし，ノイズのポートである $h(x)$ の構造はここでは仮定せず，一般的な状態の関数 $h_1(x), h_2(x)$ のまま解析を進める．

文献 16) では，確定システムである非ホロノミック拘束を持つポート・ハミルトン系を，$U(q_1^2 + q_2^2, q_3)$ の構造を持つ任意のポテンシャル関数と座標変換 $\bar{x} = \Phi(x)$ を用いて，ある正準形に変換することで，指定した不変集合

$$\bar{\Omega} := \left\{ \bar{x} \;\middle|\; \bar{q}_1 = \bar{q}_2 = 0 \;,\; \bar{p}_1 = \bar{p}_2 = 0 \right\} \tag{36}$$

への安定化を達成する制御手法を提案している．本章では文献 16) で提案された座標変換を利用して，システムにノイズが含まれる場合においても，(36) 式と同じ不変集合への確率安定化を達成するコントローラを設計することを目標とする．

$H$ が $p$ の二次形式で半正定であるため，$\bar{H} = H + U$ を正定とするようなポテンシャル関数 $U(q_1^2 + q_2^2, q_3)$ を定め，文献 16) で用いられている次式の座標変換を利用する．

$$\bar{q} := \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \\ \Phi_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan(q_1) \\ q_2 \\ 2q_3 - q_2\tan(q_1) \end{pmatrix},$$

$$\bar{p} := \begin{pmatrix} \Phi_4(x) \\ \Phi_5(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{p_1}{1 + \tan^2(q_1)} \\ p_2\sqrt{1 + \tan^2(q_1)} \end{pmatrix} \tag{37}$$

(37) 式で定めた座標変換 $\Phi(x)$ がポテンシャル関数 $U$ に関する確率一般化正準変換となるように，定理 2 を用いて残りの設計パラメータである $\beta(x), P(x), Q(x)$ を定める．

$$P(x) = 0,$$
$$Q(x) = \left(\begin{array}{c|cc} O_{33} & \multicolumn{2}{c}{O_{32}} \\ \hline O_{23} & \begin{array}{cc} Q_{44}(x) & Q_{45}(x) \\ Q_{45}(x) & Q_{55}(x) \end{array} \end{array}\right) =: \left(\begin{array}{c|c} O_{33} & O_{32} \\ \hline O_{23} & \tilde{Q}(x) \end{array}\right) \tag{38}$$

として (20) 式を解くと次式を得る．ただし，$Q_{44}(x), Q_{45}(x), Q_{55}(x)$ は，(38) 式の $\tilde{Q}(x)$ が半正定対称行列となるように定めるものとする．

$$\beta_1(x) = \frac{\partial U}{\partial q_1} + p_1 Q_{44}(x) + p_2 Q_{45}(x) \tag{39}$$
$$\beta_2(x) = \cos(q_1)\frac{\partial U}{\partial q_2} + \sin(q_1)\frac{\partial U}{\partial q_3} + p_1 Q_{45}(x) + p_2 Q_{55}(x)$$

ここで，$\beta(x) = (\beta_1(x), \beta_2(x))^{\mathrm{T}}$ である．このままでは，変換後のシステムは (2) 式の構造を保存するが，確率受動的であるとは限らない．そこで，定理 3 の条件 (32) を満たすように，設計の自由度として残っている $Q_{44}(x), Q_{45}(x), Q_{55}(x)$ を定める．(32) 式を解くと，次式を得る．

$$\frac{1}{2}(h_1^2(x) + h_2^2(x)) \leq p_1^2 Q_{44}(x) + 2p_1p_2Q_{45}(x) + p_2^2 Q_{55}(x) \tag{40}$$

よって，ノイズのポート $h_1(x), h_2(x)$ に対して，(40) 式を満たす $Q_{44}(x), Q_{45}(x), Q_{55}(x)$ が存在すれば，変換後のシステムは確率受動的となる．そこで，$h_i(x) = o(\|p\|)$ $(i = 1, 2)$ と仮定することで，(40) 式の解は存在し，以後は，(40) 式の等式を満たす $Q_{44}(x), Q_{45}(x), Q_{55}(x)$ が得られたものとして，解析を続ける．また，(40) 式の条件はポテンシャル関数 $U(q)$ に影響されないため，変換前にノイズの影響を打ち消すように $Q_{44}(x), Q_{45}(x), Q_{55}(x)$ を設計しておけば，任意の $U(q)$ を用いた変換後も確率受動性は保たれる．

変換後のシステムは次式で与えられ，確率ポート・ハミルトン系 (2) の構造が保存されていることがわかる．

$$\bar{J}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{q}_2 & \bar{q}_1 \\ -1 & 0 & \bar{q}_2 & 0 & -\bar{p}_2\bar{q}_1/(1+\bar{q}_1^2) \\ 0 & -1 & -\bar{q}_1 & \bar{p}_2\bar{q}_1/(1+\bar{q}_1^2) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{g}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} O_{32} \\ \mathrm{diag}\{1/(1+\bar{q}_1^2), \sqrt{1+\bar{q}_1^2}\} \end{pmatrix}, \qquad (41)$$

$$\bar{h}(\bar{x}) = \left.\begin{pmatrix} O_{32} \\ \mathrm{diag}\{\cos^2(q_1)h_1(x), h_2(x)/\cos(q_1)\} \end{pmatrix}\right|_{x=\Phi^{-1}(\bar{x})}$$

さらにこのシステムは確率受動的であり，$\bar{u} = -\bar{y}$ により入出力零化空間へ確率安定化できる．変換前のシステムへの入力も $\alpha = g^{\mathrm{T}}\frac{\partial U}{\partial x}^{\mathrm{T}} = 0$ と計算できることから，$u = \bar{u} = -y - \beta(x)$ と簡単に得られる．さらに，システムが確定システムにおける零状態可検出性に対応する定理 3 の条件 $\Gamma \cap \Omega = \{0\}$ を満たせば，原点を確率漸近安定化できる．そこで，このシステムの不変平衡点集合を確認する．まず，(33) 式における $\Gamma$ を求める．$Q_{44}(x), Q_{45}(x), Q_{55}(x)$ は (40) 式の等式を満たすように定められていることから次式が成立する．

$$\mathcal{L}_0\bar{H}(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}}\bar{f}_0 + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}}\right)^{\mathrm{T}}\bar{h}\bar{h}^{\mathrm{T}}\right\} = 0,$$

よって，$\Gamma = \mathbb{R}^2$ を得る．つぎに，入出力零化空間 $\Omega$ を求める．

$$\bar{y} = \bar{g}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} (1+\bar{q}_1^2)\bar{p}_1 \\ \bar{p}_2\Big/\sqrt{1+\bar{q}_1^2} \end{pmatrix} \equiv 0$$

より，$\{\bar{x} \mid \bar{p} = 0\}$ が必要である．また，この条件の下で次式のように計算できる．

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 L_{\bar{g}_1}\bar{H}(\bar{x})\Big|_{\bar{p}=0} &= -(1+\bar{q}_1^2)\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{q}_1} - \bar{q}_2\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{q}_3}\right) \\ \mathcal{L}_0 L_{\bar{g}_2}\bar{H}(\bar{x})\Big|_{\bar{p}=0} &= -\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{q}_2} + \bar{q}_1\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{q}_3}\right)\Big/\sqrt{1+\bar{q}_1^2} \end{aligned}$$

$\mathcal{L}_0 L_{\bar{g}_1}\bar{H}(\bar{x})\Big|_{\bar{p}=0} = \mathcal{L}_0 L_{\bar{g}_2}\bar{H}(\bar{x})\Big|_{\bar{p}=0} \equiv 0$ より，

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{\bar{x} \;\middle|\; \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{q}}\bar{J}_{12}(\bar{q}) = 0,\ \bar{p} = 0\right\} \\ &= \left\{\bar{x} \mid \bar{q}_1 = \bar{q}_2 = 0\ ,\ \bar{p}_1 = \bar{p}_2 = 0\right\} \end{aligned} \qquad (42)$$

と求まる．ただし，

$$\bar{J}_{12} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\bar{q}_2 & \bar{q}_1 \end{pmatrix}$$

である．よって，(42) 式より，不規則なノイズが含まれる場合でも，提案手法により，指定した不変集合 (36) 式へ確率安定化を達成するコントローラを設計することができた．

ここで，$h_1(x) = k_1p_1, h_2(x) = k_2p_2, U = 1/2q^{\mathrm{T}}q, Q_{44} = k_1^2/2,\ Q_{45} = 0, Q_{55} = k_2^2/2,\ k_1 = k_2 = 15$，初期状態を $(0.1, 0.4, 0.2, 0, 0)$ として，文献 17) の方法に従い生成したウィーナ過程を用いて行ったシミュレーション結果を示す．

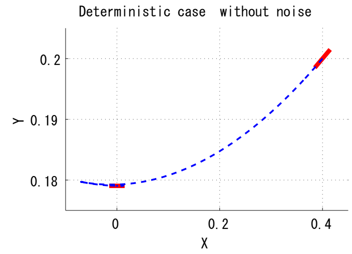


**Fig. 2**　Motion of the coin (deterministic case without noise)

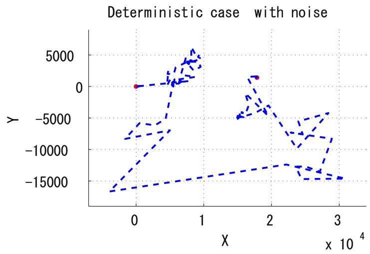


**Fig. 3**　Motion of the coin (deterministic case with noise)

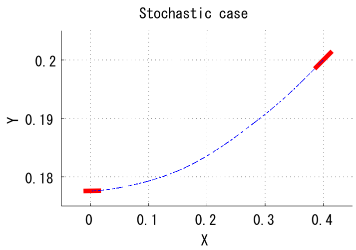


**Fig. 4**　Motion of the coin (proposed method with noise)

**Fig. 2** は文献 16) の手法を用いて設計した制御器 ((39) 式で $Q = 0$ に相当する) を不規則外乱がない ($h = 0$) システムに適用した結果である．**Fig. 3** は不規則外乱が存在する場合に同じ制御器を適用した結果である．外乱がない場合では制御性能を達成できているが，外乱が加わると発散していることが分かる．一方，**Fig. 4** は Fig. 3 と同一の不規則外乱のデータに対して提案手法を用いて設計した制御器を適用した結果である．Fig. 4 では Fig. 3 の場合と同じ外乱が発生しても制御目標を達成できており，提案手法の有効性を示している．

最後に，文献 16) では，ポテンシャル関数 $U(q)$ を不可微分な関数とし，原点以外の不変集合を不安定化することで原点を漸近安定化する手法を提案している．この手法の確率システムへの拡張は今後の課題とし，本章では不変集合への安定化までで終えることとする．

## 5. おわりに

本論文では，確定システムにおいて提案されていたポート・ハミルトン系を，伊藤型確率微分方程式で記述される確率ポート・ハミルトン系へと拡張した．つぎに，ポート・ハミルトン系が満たす性質のいくつかは，このシステムでは必ずしも成り立たないことを示し，それを満たすための条件を明らかにした．最後に，確率一般化正準変換を導入し，確率受動性

に基づく安定化手法を提案した．本論文で示したこれらの性質は，確定システムにおける結果を特別な場合として含んでいる．

今後は，4 章の最後で述べた原点への確率漸近安定化手法の検討を含めた，非ホロノミック拘束を持つ確率ポート・ハミルトン系に関するさらなる考察を行いたい．また，本論文の結果を時変な場合へ拡張し，確率軌道追従制御等へ応用していきたいと考えている．

## 《付　　録》

### A. 確率 (漸近) 安定 [11),17)]

次式の伊藤型確率微分方程式を考える．

$$\mathrm{d}x = f(t,x)\,\mathrm{d}t + h(t,x)\,\mathrm{d}w \tag{A.1}$$

もし全ての $\epsilon, \delta > 0$ に対して，初期状態 $x(t^0)$ が $\|x(t^0)\| < r(\epsilon,\delta)$ ならば

$$\Pr\left\{\sup_{t \le t_0} \|x(t)\| > \epsilon\right\} < \delta$$

となるような実数 $r(\epsilon,\delta)$ が存在するとき，(A. 1) の平衡点は確率安定であるという．ただし，$\Pr\{\cdot\}$ は確率を表す．

さらに，全ての $\epsilon > 0$ に対して，

$$\lim_{T\to\infty} \Pr\left\{\sup_{t \le T} \|x(t)\| > \epsilon\right\} = 0$$

となるならば，平衡点は確率漸近安定であるという．

### B. 伊藤の公式 [18)]

システム (A. 1) を考える．このときスカラ関数 $V(t,x)$ の増分は次式で与えられる (証明は文献 17), 18) を参照のこと)．

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V(t,x) = &\left[\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} f(t,x)\right.\\ &\left.+\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} h(t,x)h(t,x)^{\mathrm{T}}\right\}\right]\mathrm{d}t\\ &+\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} h(t,x)\,\mathrm{d}w\end{aligned}$$

## 参 考 文 献


1) B. Maschke and A. J. van der Schaft : Port-controlled Hamiltonian systems: modelling origins and system theoretic properties, Proc. 2nd IFAC Symp. Nonlinear Control Systems, 282/288 (1992)
2) A. J. van der Schaft : $L_2$-gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control, Vol. 218, Lecture Notes on Control and Information Science, Berlin (1996)
3) A. J. van der Schaft and B. M. J. Maschke : Mathematical modeling of constrained Hamiltonian systems, Proc. 3rd IFAC Symp. Nonlinear Control Systems (1995)
4) T. Misawa : Conserved quantities and symmetry for stochastic dynamical systems, Phys. Lett. A, **195**, 185/189 (1994)
5) N. Ikeda and S. Watanabe : Stochastic differential equations and diffusion processes, North-Holland/Kodansha, Amsterdam/Tokyo, second edition (1989)
6) R. S. Bucy : Stability and positive supermartingales, J. Differential Equations, **1**-2, 151/155 (1965)
7) H. J. Kushner : Stochastic Stability and Control, Academic Press (1967)
8) P. Florchinger : A passive system approach to feedback stabilization of nonlinear control stochastic systems, SIAM J. Control Optim., **37**-6, 1848/1864 (1999)
9) J. C. Willems : Dissipative dynamical systems -Part I: General theory, Arch. Rational Mechanics and Analysis, **45**, 321/351 (1972)
10) C. I. Byrnes, A. Isidori and J. C. Willems : Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems, IEEE Trans. Autom. Contr., **36**-11, 1228/1240 (1991)
11) 砂原 (編)：確率システム理論 II, 朝倉書店 (1982)
12) K. Fujimoto and T. Sugie : Canonical transformation and stabilization of generalized Hamiltonian systems, Systems & Control Letters, **42**-3, 217/227 (2001)
13) 藤本, 石川, 杉江：一般化正準変換を用いた安定化法のロバスト性に関する考察–二輪車両系の実験と解析, システム制御情報学会論文集, **14**-8, 387/394 (2001)
14) P. E. Crouch and A. J. van der Schaft : Variational and Hamiltonian Control Systems, Vol. 101 of Lecture Notes on Control and Information Science, Springer-Verlag, Berlin (1987)
15) K. Fujimoto, K. Sakurama and T. Sugie : Trajectory tracking control of port-controlled Hamiltonian systems via generalized canonical transformations, Automatica, **39**-12, 2059/2069 (2003)
16) 藤本, 杉江：一般化正準変換を用いたあるクラスの非ホロノミック系の安定化, 計測自動制御学会論文集, **36**-9, 749/756 (2000)
17) 大住：確率システム入門, 朝倉書店 (2002)
18) K. Itô : On a formula concerning stochastic differentials, Nagoya Math. J., **3**, 55/65 (1951)



［著　者　紹　介］

**佐　藤　訓　志**（学生会員）

2005 年名古屋大学工学部機械・航空工学科卒業．2007 年名古屋大学大学院工学研究科博士前期課程修了．同年同博士後期課程に進学し，現在に至る．非線形制御の研究に従事．

［著　者　紹　介］

**藤　本　健　治**（正会員）

1994 年京都大学工学部精密工学科卒業，1996 年京都大学大学院工学研究科修士課程応用システム科学専攻修了，1997 年同大学院博士後期課程を中途退学，1997 年京都大学大学院工学研究科助手等を経て，2007 年より名古屋大学大学院工学研究科准教授．1999 年オーストラリア国立大学客員研究員，1999-2000 年および 2002 年デルフト工科大学客員研究員．非線形制御の研究に従事．博士 (情報学)．IEEE, 計測自動制御学会，システム制御情報学会，日本機械学会，日本鉄鋼協会の会員．