計測自動制御学会論文集
Vol.43, No.3, 1/7（2006）

左連続動的システムにおける周期軌道の指数安定性について†

一般化ポアンカレ写像に基づくアプローチ

佐 藤 訓 志*・佐 伯 正 美*

On exponential stability of periodic orbits in left-continuous dynamical systems

Generalized Poincaré mapping approach

Satoshi SATOH* and Masami SAEKI*

This paper considers a left-continuous dynamical system and exponential stability of periodic orbits in the system. Firstly, we introduce new continuity concepts with respect to initial conditions, and prove their equivalence conditions. Under the equivalence conditions, it is useful for analysis of exponential stability of hybrid periodic orbits to use those continuities differently according to where discontinuous jumps exist. Finally, we prove equivalence between exponential stability for a periodic orbit, and that for a fixed point of the generalized Poincaré map by applying the analysis method based on the proposed continuities.

Key Words: Hybrid dynamical systems, Periodic orbits, Poincaré maps, Exponential stability

1. はじめに

連続的な動特性と離散的な動特性とが混在するハイブリッドシステム[1)]は，論理的離散事象，スイッチング，撃力などの要素を含む幅広いクラスのシステムを表現できることから，このシステムに関する多くの研究が成されている．

筆者らはこれまでに歩行ロボットの歩行制御に関する研究を行ってきた[2),3)]．歩行ロボットの運動は，遊脚の振り出しによる 1 脚支持期と，着地時の 2 脚支持期が存在し，一般的にハイブリッドシステムとして表現され，例えば文献 4) では，その 1 クラスである Impulsive system[5)]として定式化されている．歩行軌道の安定化は，ロボットが 1 歩の歩行を終えるまでに，ある程度達成されなければならず，文献 6), 7) では指数安定に基づく安定化手法が提案されている．しかしながら，これらの結果は Impulsive system に限定されているため，後述するようなより広いクラスのハイブリッドシステムの周期軌道に対する指数安定性の判定手法に関する考察が本論文の一つ目の動機である．状態の不連続な遷移を含むハイブリッド周期軌道に対する安定性の判定や，安定化制御器の設計には，文献 4) で Impulsive system へと拡張された一般化ポアンカレ写像に基づく方法が有用である．その理由は，この手法により軌道安定化問題を従来の制御問題としてよく議論されている平衡点の安定化問題へと帰着でき，安定性判別や補償器の設計条件が見通しよく得られるためである．文献 4) において，一般化ポアンカレ写像による Impulsive system の 1-周期軌道の Lyapunov 安定性と漸近安定性条件が導出され，さらに文献 8) において，指数安定性の条件が示された．そこでは，文献 4) では必要としなかった局所 Lipschitz 連続性の条件が新たに必要となるなど，指数安定性の議論は，Lyapunov 安定性と漸近安定性に対する結果の自明な拡張ではなく，新たな議論が必要となる．これは後述するように，本論文の結果においても同様である．

従来のハイブリッドシステムは，Impulsive system[5)]や Switched system[9)]などのように微分方程式に立脚したものが多い．不連続な微分方程式を扱うには適切な解の定義が必要であり，表現方法や解の定義の採り方で，解析法や結果が異なってしまう．さらに，筆者らは歩行中の環境外乱を含めたロボットの動特性を，確率システムとみなし，歩行制御法の確率制御への拡張[10)]に取り組んでいるが，確率システムは確率微分方程式により記述されるため，文献 4), 8) の結果をそのまま用いることができない．筆者らの研究だけでなく，近年分子生物学やネットワークシステムの分野においても確率ハイブリッドシステム[11)]が注目されており，従来のような微分方程式に立脚しない新たなハイブリッドシステムの統一的な表現方法とその解析手法が必要となる．これが本論文の二つ目の動機である．文献 12) で提案されたハイブリッドシステムの統一的な表現方法である左連続動的システムは，いくつかの公理を満たすベクトル空間からベクトル空間への写像として定義され，解軌道を生成する動特性の表現は微分方程式に限

† 第 39 回制御理論シンポジウムで一部発表 (2010・9)

* 広島大学 大学院 工学研究院
* Division of Mechanical Systems and Applied Mechanics, Faculty of Engineering, Hiroshima University, 1-4-1, Kagamiyama, Higashi-Hiroshima 739-8527, Japan

定されない．さらに，Impulsive system や Switched system など従来の表現方法の多くを特別な場合として含む[12]．そのため，このシステムに対する理論を確立することで，広いクラスのハイブリッドシステムの周期軌道の安定性解析を包括的に扱うことが可能となる．すでに文献 13) において，一般化ポアンカレ写像による左連続動的システムの一般の N-周期軌道の Lyapunov 安定性と漸近安定性条件が導出されているが，指数安定性に関する議論は行われていなかった．

そこでこれらの動機を踏まえ，本論文では左連続動的システムを対象とし，一般化ポアンカレ写像に基づく N-周期軌道の指数安定性の議論を行う．しかしながら，前述の文献 8) の場合と同様に，本論文で得られる指数安定性に関する結果は，文献 13) の Lyapunov 安定性と漸近安定性に関する議論の自明な拡張ではない．また，文献 8) の結果を特別な場合として包含している．文献 4) では左連続動的システムに対して，初期値に関する一様半連続性や結合連続性という連続性の概念を導入しているが，本論文における一つ目の結果は，従来の局所 Lipschitz 連続性に相当する新たな二つの連続性を提案し，これらの等価性条件を明らかにしたことである．ハイブリッド軌道の安定性を評価する際には，その軌道に摂動を加えた軌道との距離を評価する必要があるが，これらの軌道が不連続な状態遷移を起こす時刻が異なることが問題となる．詳細は続く本文で述べるが，本論文で明らかにする等価性条件の下で，提案した二つの連続性に基づく解析を評価区間によって使い分けることで，異なる遷移時刻をもつ軌道間の距離を任意の時刻にわたって評価できるようになる．つぎに，この解析手法を駆使して左連続動的システムの N-周期軌道の指数安定性と，対応する一般化ポアンカレ写像における平衡点の指数安定性との等価性条件を導出したことが本論文の二つ目の結果である．前述の理由から，この結果はより広いクラスのハイブリッド周期軌道に対する指数安定性の判定や，安定化制御器の設計に有用である．さいごに，このような解析手法は，周期軌道に限らず一般的な左連続動的システムのハイブリッド軌道の解析においても利用できる．

2. 左連続動的システム

本章では文献 12), 13) に基づき，左連続動的システムの定義と，このシステムに関するいくつかの結果を示す．これ以降本論文では，$\mathbb{R}$ は実数の集合，$\mathbb{N}$ は非負の整数の集合を表し，中心が $a \in \mathbb{R}^n$ で半径が $\delta > 0$ の開球を $\mathcal{B}_\delta(a)$，点 a と集合 $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ との距離を $\mathrm{dist}(a, \mathcal{A}) := \inf_{x \in \mathcal{A}} \|a - x\|$ と表す．

定義 1. [12] $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ を開連結集合とし，$\mathcal{T}_{x^0} \subseteq [0, \infty)$, $x^0 \in \mathcal{D}$ を，$[0,\infty) \setminus \mathcal{T}_{x^0}$ が可算集合となるような $[0,\infty)$ 上の稠密な部分集合とする．このとき，$\mathcal{D}$ 上の左連続動的システムは三組み $(\mathcal{D}, [0,\infty), \phi)$ で定義される．ただし，$\phi : [0,\infty) \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ は以下の公理を満たすものとする．

i) (左連続性) 全ての $x^0 \in \mathcal{D}, t \in (0,\infty)$ において，ϕ は t に関して左連続である．つまり，$\lim_{\tau \to t-0} \phi(\tau, x^0) = \phi(t, x^0)$.

ii) (無矛盾性) 全ての $x^0 \in \mathcal{D}$ において，$\phi(0, x^0) = x^0$.

iii) (半群性) 全ての $x^0 \in \mathcal{D}$, $t, \tau \in [0,\infty)$ において，$\phi(\tau, \phi(t, x^0)) = \phi(t + \tau, x^0)$.

iv) (初期値に関する半連続性) 全ての $x^0 \in \mathcal{D}$ に対して $\mathcal{T}_{x^0} \subseteq [0,\infty)$ が存在して以下の条件を満たす．$[0,\infty) \setminus \mathcal{T}_{x^0}$ は可算集合であり，全ての $\epsilon > 0$ と $t \in \mathcal{T}_{x^0}$ に対して，$\|x^0 - y^0\| < \delta$, $y^0 \in \mathcal{D}$ ならば，$\|\phi(t, x^0) - \phi(t, y^0)\| < \epsilon$ を満たす $\delta = \delta(\epsilon, x^0, t) > 0$ が存在する．

以降では，左連続動的システム $(\mathcal{D}, [0,\infty), \phi)$ を $\mathcal{G}$ と表し，システム $\mathcal{G}$ などとよぶことにする．$\phi(t, x^0)$, $t \geq 0$ を，初期状態を $x^0 \in \mathcal{D}$ とするシステム $\mathcal{G}$ の解軌道とよぶ．定義 1 で用いられる $\mathcal{T}_{x^0}$ は，$[0,\infty) \setminus \mathcal{T}_{x^0}$ がリセット時間の集合，つまり任意の初期状態 $x^0 \in \mathcal{D}$ に関する解軌道 $\phi(\cdot, x^0)$ が不連続となる時間の集合となるように，$\mathcal{T}_{x^0} := \{t \in [0,\infty) | \ \phi(t, x^0) = \lim_{\tau \to t+0} \phi(\tau, x^0)\}$ と定義する．初期状態 x^0 に関するリセット集合 $\mathcal{S}_{x^0}$ を $\mathcal{S}_{x^0} := \{x \in \mathcal{D} | \ x = \phi(t, x^0), \ t \in [0,\infty) \setminus \mathcal{T}_{x^0}\}$ と定義し，リセット集合 $\mathcal{S}$ を $\mathcal{S} := \cup_{x^0 \in \mathcal{D}} \mathcal{S}_{x^0}$ と定義する．初期状態 x^0 に関するリセット時間を $\tau_i(x^0)$, $i \in \mathbb{N}$ と表す．ただし，$\tau_0(x^0) := 0$ とし $\tau_1(x^0) < \tau_2(x^0) < \cdots$ であり $\{\tau_1(x^0), \tau_2(x^0), \cdots\} = [0,\infty) \setminus \mathcal{T}_{x^0}$ を満たすものとする．$x \in \mathcal{S}$ ならば，$\tau_1(x) = 0$ に注意する．ここで，文献 13) と同様にリセット時間に関して以下の仮定をおく．

仮定 1. 全ての $i \in \mathbb{N}$ に対して，$\tau_i(\cdot)$ は連続であり，さらに全ての $x^0 \in \mathcal{D}$ に対して，$\tau_{i+1}(x^0) - \tau_i(x^0) \geq \epsilon_\tau(x^0)$, $i \in \mathbb{N}$ を満たす $\epsilon_\tau(x^0) > 0$ が存在する．

三組み $(\mathcal{D}, [0,\infty), \phi)$ が左連続動的システムとなるための十分条件が，文献 13) において以下のように与えられている．

命題 1. [13] 三組み $(\mathcal{D}, [0,\infty), \phi)$ において，$\phi : [0,\infty) \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ が定義 *1* の公理 *i)* から *iii)* と，以下を満たすものとする．

iv)' (初期値に関する一様半連続性) 全ての $x^0 \in \mathcal{D}$, $\epsilon, \eta > 0$, $T \in \mathcal{T}_{x^0} \subseteq [0,\infty)$ に対して，以下の条件を満たす $\delta(\epsilon, \eta, x^0, T) > 0$ が存在する．$\|x^0 - y^0\| < \delta$, $y^0 \in \mathcal{D}$ ならば，全ての $\tau \in [0, T] \setminus \mathcal{T}_{x^0}$ において $|t - \tau| > \eta$ を満たす任意の $t \in \mathcal{T}_{x^0}$ に対して，$\|\phi(t, x^0) - \phi(t, y^0)\| < \epsilon$.

このとき，三組み $(\mathcal{D}, [0,\infty), \phi)$ は左連続動的システムとなる．

公理 *iv)'* を満たす左連続動的システム $\mathcal{G}$ は，強左連続動的システムをよばれる．つぎに，初期値に関する一様半連続性と関連する結合連続性を定義する．

定義 2. [13] *(結合連続性)*
任意の $\epsilon > 0$ と $k \in \mathbb{N}$ に対して，$|t - t'| + \|x^0 - y^0\| < \delta$ ならば，$\|\phi(t, x^0) - \phi(t', y^0)\| < \epsilon$，ただし，$x^0, y^0 \in \mathcal{D}$, $t \in (\tau_k(x^0), \tau_{k+1}(x^0)]$, $t' \in (\tau_k(y^0), \tau_{k+1}(y^0)]$ となるような $\delta = \delta(\epsilon, k) > 0$ が存在するとき，システム $\mathcal{G}$ は結合連続であるという．

文献 13) により，初期値に関する一様半連続性と結合連続

性の関係に関するつぎの命題が与えられている．

命題 2. [13] 公理 *i)* から *iii)* を満たすシステム $\mathcal{G}$ を考え，仮定 *1* が成立するものとする．このとき，$\mathcal{G}$ が初期値に関して一様半連続であるための必要十分条件は，$\mathcal{G}$ において結合連続性が成り立つことである．

さいごに，システム $\mathcal{G}$ における周期軌道 $\mathcal{O}$ と，一般化ポアンカレ写像 P と，周期軌道の Lyapunov 安定性の定義を文献 4), 13) に基づき示す．これらは次章で必要となる．

定義 3. システム $\mathcal{G}$ の解軌道 $\phi(t,x^0)$ が周期的であるとは，周期を表す有界な正定数 $T>0$ が存在し，全ての $t\geq 0$ に対して $\phi(t+T,x^0)=\phi(t,x^0)$ を満たすことである．さらに，集合 $\mathcal{O}\subset\mathcal{D}$ が，$\mathcal{G}$ のある周期的な解軌道 $\phi(t,x^0)$ において $\mathcal{O}=\{x\in\mathcal{D}|\ x=\phi(t,x^0),\ 0\leq t\leq T\}$ で与えられるとき，集合 $\mathcal{O}$ を $\mathcal{G}$ の周期軌道とよぶ．

注意 1. 仮定 *1* より，全ての $\xi\in\mathcal{D}$ に対して ξ に関するリセット集合 $\mathcal{S}_\xi$ は有限個の孤立点の集合となる．また，全ての $\xi\in\mathcal{O}$ に対して，$\tau_{i+N}(\xi)=\tau_i(\xi)+T,\ i\in\mathbb{N}$ を満たす $\mathcal{O}$ を N-周期軌道とよぶ．ここで，正の整数 N は $\mathcal{S}_\xi$ の要素の数を表す．

定義 4. 集合 $\hat{\mathcal{S}}\subset\mathcal{S}$ を $\mathcal{O}\cap\hat{\mathcal{S}}$ が一元集合となるように定め，一般化ポアンカレ写像 $P:\hat{\mathcal{S}}\to\mathcal{S}$ を，次式で定義する．

$$P(x):=\phi(\tau_{N+1}(x),x),\qquad x\in\hat{\mathcal{S}} \tag{1}$$

注意 2. $\mathcal{O}\cap\mathcal{S}$ の全ての要素は孤立しているため，定義 *4* の $\hat{\mathcal{S}}$ は常に選ぶことができる．また，仮定 *1* より $\tau_{N+1}(\cdot)$ は連続であることから，(1) 式の $P(\cdot)$ は矛盾無く定義できる．

定義 5. システム $\mathcal{G}$ の周期軌道 $\mathcal{O}$ は，任意の $\epsilon>0$ に対して $\mathrm{dist}(x^0,\mathcal{O})<\delta$ なる任意の $x^0\in\mathcal{D}$ において，$\mathrm{dist}(\phi(t,x^0),\mathcal{O})<\epsilon,\ t\geq 0$ を満たす $\delta=\delta(\epsilon)>0$ が存在するとき，*Lyapunov* 安定であるという．

3. 主　結　果

本章では，左連続動的システムにおける N-周期軌道の指数安定性と，一般化ポアンカレ写像における平衡点の安定性との関連を明らかにする．一般化ポアンカレ写像に基づく指数安定性の議論は，文献 13) における Lyapunov 安定性と漸近安定性に関する結果の自明な拡張ではない．また，本論文の結果は文献 8) における Impulsive system の 1-周期軌道の指数安定性に関する結果を，特別な場合として含んでいる．

本論文ではまず，文献 13) の議論で用いられた初期値に関する一様半連続性や結合連続性よりも厳しい連続性の概念を新たに導入する．はじめに，初期値に関する局所 Lipschitz 連続性を次のように定義する．

定義 6. *(初期値に関する局所 Lipschitz 連続性)*
全ての $x^0\in\mathcal{D},\ \eta>0,\ T\in\mathcal{T}_{x^0}\subseteq[0,\infty)$ に対して，$\delta(\eta,x^0,T)>0$ が存在して以下の条件を満たすとき，システム $\mathcal{G}$ は初期値に関して局所 *Lipschitz* 連続であるという．$\|x^0-y^0\|<\delta,\ y^0\in\mathcal{D}$ ならば，全ての $\tau\in[0,T]\setminus\mathcal{T}_{x^0}$ において $|t-\tau|>\eta$ を満たす任意の $t\in\mathcal{T}_{x^0}$ に対して，$\|\phi(t,x^0)-\phi(t,y^0)\|\leq K_x\|x^0-y^0\|$ を満たす正定数 K_x が存在する．

つぎに，結合 Lipschitz 連続性を次のように定義する．

定義 7. *(結合 Lipschitz 連続性)*
任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して，$\delta(x^0,k)>0$ が存在して以下の条件を満たすとき，システム $\mathcal{G}$ は結合 *Lipschitz* 連続であるという．$|t-t'|+\|x^0-y^0\|<\delta$ ならば，$\|\phi(t,x^0)-\phi(t',y^0)\|\leq L_x\|x^0-y^0\|+L_t|t-t'|$ を満たす $L_x,L_t>0$ が存在する．ただし，$x^0,y^0\in\mathcal{D},\ t\in(\tau_k(x^0),\tau_{k+1}(x^0)]$, $t'\in(\tau_k(y^0),\tau_{k+1}(y^0)]$ である．

さらに，仮定 1 の代わりに以下を仮定する．

仮定 2. 全ての $i\in\mathbb{N}$, $x^0\in\mathcal{D}$ に対して $\delta(x^0)>0$ が存在して，$\tau_i(\cdot)$ は $\mathcal{B}_\delta(x^0)$ 上で *Lipschitz* 連続であり，さらに全ての $x^0\in\mathcal{D}$ に対して，$\tau_{i+1}(x^0)-\tau_i(x^0)\geq\epsilon_\tau(x^0),\ i\in\mathbb{N}$ を満たす $\epsilon_\tau(x^0)>0$ が存在する．

ここで，本論文の一つ目の主結果である，提案した二つの連続性の等価性を示す定理 1 を与える．この定理は，次の理由から後述する定理 2 の証明だけでなく，左連続動的システムの解軌道の解析において重要な役割を果たす．初期値に関する局所 Lipschitz 連続性は，複数のリセット時刻を含んだ時間区間において解軌道を評価するのに有用であるが，リセット時刻近傍は評価できない．一方，結合 Lipschitz 連続性は，評価区間においてリセット時刻をまたぐことはできないが，リセット時刻近傍における解軌道を評価するのに有用である．定理 1 に示す等価性から，この二つの連続性に基づく評価を使い分けることができるようになり，対象とする解軌道を所望の評価区間にわたって解析することが可能となる．

定理 1. 公理 *i)* から *iii)* を満たすシステム $\mathcal{G}$ を考え，仮定 *2* が成立し，さらに $\mathcal{G}$ が以下を満たすとする．任意の $k\in\mathbb{N}$ と $x^0\in\mathcal{D}$ に対して，$|t-t'|<\delta_t$ ならば $\|\phi(t,x^0)-\phi(t',x^0)\|\leq K_t|t-t'|$ を満たす $\delta_t(k,x^0),K_t(k,x^0)>0$ が存在する．ただし，$t,t'\in(\tau_k(x^0),\tau_{k+1}(x^0))$ である．このとき，$\mathcal{G}$ が初期値に関して局所 *Lipschitz* 連続であるための必要十分条件は，$\mathcal{G}$ において結合 *Lipschitz* 連続性が成り立つことである．

証明　はじめに必要性を示す．$\mathcal{G}$ が初期値に関して局所 Lipschitz 連続であるとし，任意の $k\in\mathbb{N}$ を決める．仮定 2 より，ある $\delta_1(x^0)>0$ が存在して，$\tau_k(\cdot),\tau_{k+1}(\cdot)$ は $\mathcal{B}_{\delta_1}(x^0)$ 上で Lipschitz 連続となる．定理の仮定より，$\underline{\delta}_t(k):=\inf_{y^0\in\mathcal{B}_{\delta_1}(x^0)}\delta_t(k,y^0)>0$, $\bar{K}_t(k):=\sup_{y^0\in\mathcal{B}_{\delta_1}(x^0)}K_t(k,y^0)>0$ が存在して，$|t-t'|<\underline{\delta}_t$ ならば

$$\|\phi(t,y^0)-\phi(t',y^0)\|\leq\bar{K}_t|t-t'|,$$

$$\forall y^0 \in \mathcal{B}_{\delta_1}(x^0),\ \ \forall t, t' \in (\tau_k(y^0), \tau_{k+1}(y^0)) \quad (2)$$

を満たす．つぎに，仮定 2 より十分小さな $\lambda > 0$ に対して，$\underline{\tau}_k(\lambda, x^0) := \inf_{y^0 \in \mathcal{B}_\lambda(x^0)} \tau_k(y^0)$ と，$\overline{\tau}_k(\lambda, x^0) := \sup_{y^0 \in \mathcal{B}_\lambda(x^0)} \tau_k(y^0)$ は矛盾無く定義できる．また仮定 1 より，全ての $x^0 \in \mathcal{D}, k \in \mathbb{N}$ に対して $\tau_k(x^0)$ が連続であることから，$\lim_{\lambda\to 0} \underline{\tau}_k(\lambda, x^0) = \lim_{\lambda \to 0} \overline{\tau}_k(\lambda, x^0) = \tau_k(x^0)$ が成立する．よって，$\delta'(\underline{\delta}_t) > 0$ が存在して，$\overline{\tau}_k(\delta', x^0) - \underline{\tau}_k(\delta', x^0) < \underline{\delta}_t$ かつ $\overline{\tau}_{k+1}(\delta', x^0) - \underline{\tau}_{k+1}(\delta', x^0) < \underline{\delta}_t$ を満たす．さて，$\eta > 0$ を以下を満たすように選ぶことができる．

$$\overline{\tau}_k(\delta', x^0) - \underline{\tau}_k(\delta', x^0) < \tau_k(x^0) - \underline{\tau}_k(\delta', x^0) + \eta < \underline{\delta}_t \quad (3)$$
$$\overline{\tau}_{k+1}(\delta', x^0) - \underline{\tau}_{k+1}(\delta', x^0) < \eta + \overline{\tau}_{k+1}(\delta', x^0) - \tau_{k+1}(x^0) < \underline{\delta}_t$$

(3) 式より，$\overline{\tau}_k(\delta', x^0) < \tau_k(x^0) + \eta$，$\tau_{k+1}(x^0) - \eta < \underline{\tau}_{k+1}(\delta', x^0)$ が成立することに注意する．このとき，初期値に関する局所 Lipschitz 連続性より $\delta''(\eta, x^0, k) > 0$，$K''_x > 0$ が存在して，次式を満たす．

$$\|\phi(t, x^0) - \phi(t, y^0)\| \le K''_x \|x^0 - y^0\|,$$
$$\forall y^0 \in \mathcal{B}_{\delta''}(x^0),\ \ \forall t \in (\tau_k(x^0) + \eta, \tau_{k+1}(x^0) - \eta) \quad (4)$$

ここで，$\delta := \min\{\delta_1, \underline{\delta}_t, \delta', \delta''\}$ と定義し，まず，$|t - t'| + \|x^0 - y^0\| < \delta$ を満たす $t \in (\tau_k(x^0) + \eta, \tau_{k+1}(x^0) - \eta)$ と $t' \in (\tau_k(y^0), \tau_{k+1}(y^0)]$，$y^0 \in \mathcal{D}$ について考える．このとき，(2),(4) 式より，次式を得る．

$$\begin{aligned}&\|\phi(t, x^0) - \phi(t', y^0)\| \\ &\le \|\phi(t, x^0) - \phi(t, y^0)\| + \|\phi(t, y^0) - \phi(t', y^0)\| \\ &\le K''_x \|x^0 - y^0\| + \bar{K}_t |t - t'| \end{aligned} \quad (5)$$

つぎに，$|t - t'| + \|x^0 - y^0\| < \delta$ を満たす $t \in (\tau_k(x^0), \tau_{k+1}(x^0)] \setminus (\tau_k(x^0) + \eta, \tau_{k+1}(x^0) - \eta)$ と $t' \in (\tau_k(y^0), \tau_{k+1}(y^0)]$，$y^0 \in \mathcal{D}$ について考える．$|t - t'| \neq 0$ のとき，(3) 式より $|t - t''| < \underline{\delta}_t$ かつ $|t' - t''| < \underline{\delta}_t$ を満たす $t'' \in (\tau_k(x^0) + \eta, \tau_{k+1}(x^0) - \eta)$ が存在する．さらに，区間 $[t, t'']$，$[t', t'']$ に対して以下を満たす有限個の分割 $t_{(i)}, t'_{(j)}$ がとれる．$t = t_{(0)} < t_{(1)} < \cdots < t_{(N_t)} = t''$ かつ $|t_{(i)} - t_{(i-1)}| < |t - t'|$，$\forall i = 1, \cdots, N_t$．同様に，$t' = t'_{(0)} < t'_{(1)} < \cdots < t'_{(N_{t'})} = t''$ かつ $|t'_{(j)} - t'_{(j-1)}| < |t - t'|$，$\forall j = 1, \cdots, N_{t'}$．これと (2),(4) 式より，次式を得る．

$$\begin{aligned}\|\phi(t, x^0) - \phi(t', y^0)\| &\le \sum_{i=1}^{N_t} \|\phi(t_{(i)}, x^0) - \phi(t_{(i-1)}, x^0)\| \\ &+ \|\phi(t'', x^0) - \phi(t'', y^0)\| + \sum_{j=1}^{N_{t'}} \|\phi(t'_{(j)}, y^0) - \phi(t'_{(j-1)}, y^0)\| \\ &\le K''_x \|x^0 - y^0\| + (N_t + N_{t'}) \bar{K}_t |t - t'| \end{aligned} \quad (6)$$

さいごに，$|t - t'| = 0$ つまり $t = t' \in (\tau_k(x^0), \tau_{k+1}(x^0)] \setminus (\tau_k(x^0) + \eta, \tau_{k+1}(x^0) - \eta) \cap (\tau_k(y^0), \tau_{k+1}(y^0)]$ のときは，$t' = t + \epsilon$，$\epsilon > 0$ として (6) を用いて，$\epsilon \to 0$ とすることで $\|\phi(t, x^0) - \phi(t, y^0)\| \le K''_x \|x^0 - y^0\|$ を得る．よって (5),(6) 式より，$L_x := K''_x$，$L_t := (N_t + N_{t'}) \bar{K}_t$ とおくことで $\mathcal{G}$ において結合 Lipschitz 連続性が成り立ち，必要性が示された．

つぎに，十分性を示す．$\mathcal{G}$ において結合 Lipschitz 連続性が成り立つものとし，任意の $\eta > 0$，$T \in \mathcal{T}_{x^0}$ を定める．ここで，$\tau_k(x^0) < T < \tau_{k+1}(x^0)$ であるとする．結合 Lipschitz 連続性より，$\delta'(k) > 0$，$L_{x,k}, L_{t,k} > 0$ が存在して，$|t - t'| + \|x^0 - y^0\| < \delta'$ ならば，$\|\phi(t, x^0) - \phi(t', y^0)\| \le L_{x,k}\|x^0 - y^0\| + L_{t,k}|t - t'|$．ただし，$x^0, y^0 \in \mathcal{D}$，$t \in (\tau_k(x^0), \tau_{k+1}(x^0)]$，$t' \in (\tau_k(y^0), \tau_{k+1}(y^0)]$ である．ここで仮定 2 より，$\delta''(\eta, x^0, k) > 0$ が存在して，$\overline{\tau}_k(\delta'', x^0) - \tau_k(x^0) < \eta$，$\tau_{k+1}(x^0) - \underline{\tau}_{k+1}(\delta'', x^0) < \eta$ が成立する．これより，もし $t' = t \in (\tau_k(x^0) + \eta, \tau_{k+1}(x^0) - \eta)$ ならば，$t \in (\tau_k(x^0), \tau_{k+1}(x^0)]$ かつ $y^0 \in \mathcal{B}_{\delta''}(x^0)$ に対して $t' \in (\tau_k(y^0), \tau_{k+1}(y^0)]$ となる．さらに，$\delta_k := \min\{\delta', \delta''\}$ とすると，結合 Lipschitz 連続性から，任意の $t' = t \in (\tau_k(x^0) + \eta, \tau_{k+1}(x^0) - \eta)$ と $y^0 \in \mathcal{B}_{\delta_k}(x^0)$ に対して $\|\phi(t, x^0) - \phi(t', y^0)\| \le L_{x,k}\|x^0 - y^0\|$ が成立する．同様にして，任意の $t' = t \in (\tau_{k-1}(x^0) + \eta, \tau_k(x^0) - \eta)$ と $y^0 \in \mathcal{B}_{\delta_{k-1}}(x^0)$ に対して上述と同様の不等式が成立するような $\delta_{k-1}(\eta, x^0, k) > 0$，$L_{x,k-1}$ が得られる．この操作を $k-2, \cdots, 1$ まで繰り返し，$\delta(\eta, x^0, T) := \min\{\delta_1, \cdots, \delta_k\}$，$K_x := \max\{L_{x,1}, \cdots, L_{x,k}\}$ と定義することで，任意の $y^0 \in \mathcal{B}_\delta(x^0)$ と $|t - \tau_l(x^0)| > \eta$，$l = 1, \cdots, k$ を満たす任意の t に対して $\|\phi(t, x^0) - \phi(t, y^0)\| \le K_x\|x^0 - y^0\|$ が成立する．これは初期値に関する局所 Lipschitz 連続性を意味することから十分性が示され，以上により題意が示された．■

本論文の二つ目の主結果を示すために，システム $\mathcal{G}$ の周期軌道 $\mathcal{O}$ の指数安定性を定義し，$\mathcal{O}$ が指数安定となるための十分条件を補題 1 として示す．

定義 8. システム $\mathcal{G}$ の周期軌道 $\mathcal{O}$ は，正定数 δ, a, b が存在して，$\mathrm{dist}(x^0, \mathcal{O}) < \delta$ なる任意の $x^0 \in \mathcal{D}$ において，$\mathrm{dist}(\phi(t, x^0), \mathcal{O}) \le ae^{-bt}\,\mathrm{dist}(x^0, \mathcal{O})$，$t \ge 0$ が成立するとき，指数安定であるという．

補題 1. システム $\mathcal{G}$ の周期軌道 $\mathcal{O}$ が指数安定であるための十分条件は，$\mathcal{O}$ の閉包 $\overline{\mathcal{O}}$ において全ての $p_{\mathcal{O}} \in \overline{\mathcal{O}}$ に対して，$\tilde{\delta}(p_{\mathcal{O}}) > 0$ が存在して，以下を満たすことである．任意の $z \in \mathcal{B}_{\tilde{\delta}}(p_{\mathcal{O}})$ に対して，正定数 a, b が存在して，$\mathrm{dist}(\phi(t, z), \mathcal{O}) \le ae^{-bt}\,\mathrm{dist}(z, \mathcal{O})$，$t \ge 0$ が成立する．

証明　任意の $p_{\mathcal{O}} \in \overline{\mathcal{O}}$ を一つ定め，$\tilde{\delta}'(p_{\mathcal{O}}) > 0$ を点 $p_{\mathcal{O}}$ において補題の不等式を満たす最大のものとする．$\delta := \inf_{p_{\mathcal{O}} \in \overline{\mathcal{O}}} \tilde{\delta}'(p_{\mathcal{O}})$ と定義し，まずは背理法により $\delta > 0$ を示す．

$\delta = 0$ と仮定すると，$\lim_{k\to\infty} \tilde{\delta}'(p_{\mathcal{O}(k)}) = 0$ を満たす無限列 $\{p_{\mathcal{O}(k)}\}_{k=1}^\infty \in \overline{\mathcal{O}}$ が存在する．この $\{p_{\mathcal{O}(k)}\}_{k=1}^\infty$ は，有界な無限列であるから Weierstrass の定理より，$\lim_{l\to\infty} q_{\mathcal{O}(l)} = q_{\mathcal{O}}$ かつ $\lim_{l\to\infty} \tilde{\delta}'(q_{\mathcal{O}(l)}) = 0$ を満たす収束列 $\{q_{\mathcal{O}(l)}\}_{l=1}^\infty \in \{p_{\mathcal{O}(k)}\}_{k=1}^\infty$ が存在する．$\overline{\mathcal{O}}$ は閉集合であり $\{q_{\mathcal{O}(l)}\}_{l=1}^\infty \in \overline{\mathcal{O}}$ より，$q_{\mathcal{O}} \in \overline{\mathcal{O}}$ であることから，補題の仮定より $\tilde{\delta}'(q_{\mathcal{O}}) > 0$ が存

在する．よって，ある微小正定数 μ に対して $\mathcal{B}_{\tilde{\delta}'(\tilde{q}_{\mathcal{O}})+\mu}(\tilde{q}_{\mathcal{O}}) \subset \mathcal{B}_{\tilde{\delta}'(q_{\mathcal{O}})}(q_{\mathcal{O}})$ を満たす $\tilde{q}_{\mathcal{O}} \in \{q_{\mathcal{O}(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ が存在する．全ての $p_{\mathcal{O}} \in \overline{\mathcal{O}}$ に対して $\tilde{\delta}'(p_{\mathcal{O}}) > 0$ は補題の不等式を満たす最大のものであるから，$\mathrm{dist}(\phi(t',z'),\mathcal{O}) > ae^{-bt'}\,\mathrm{dist}(z',\mathcal{O})$ を満たす $z' \in \mathcal{B}_{\tilde{\delta}'(\tilde{q}_{\mathcal{O}})+\mu}(\tilde{q}_{\mathcal{O}})$ と $t' \in [0,\infty)$ が存在する．しかしながら，$\mathcal{B}_{\tilde{\delta}'(\tilde{q}_{\mathcal{O}})+\mu}(\tilde{q}_{\mathcal{O}}) \subset \mathcal{B}_{\tilde{\delta}'(q_{\mathcal{O}})}(q_{\mathcal{O}})$ であることから，全ての $z' \in \mathcal{B}_{\tilde{\delta}'(q_{\mathcal{O}})}(q_{\mathcal{O}})$ に対して $\mathrm{dist}(\phi(t,z'),\mathcal{O}) < ae^{-bt}\,\mathrm{dist}(z',\mathcal{O})$, $\forall t \geq 0$ を満たすため，これは矛盾である．よって，$\inf_{p_{\mathcal{O}}\in\overline{\mathcal{O}}} \tilde{\delta}'(p_{\mathcal{O}}) > 0$ が示された．この δ を用いることで，定義 8 より $\mathcal{O}$ が指数安定となり，題意が示された．■

本論文の二つ目の主結果である，左連続動的システムにおける N-周期軌道の指数安定性と，(1) 式で定義された一般化ポアンカレ写像における平衡点の安定性との関連を示す次の定理を与える．この結果は，左連続動的システムのハイブリッド周期軌道に対する指数安定性の判定や，安定化制御器の設計に有用である．

定理 2. 公理 *i)* から *iii)* を満たし，初期値に関する局所 *Lipschitz* 連続なシステム $\mathcal{G}$ と，(1) 式で定義された一般化ポアンカレ写像 P を考え，仮定 *2* が成立するものとする． さらに $\mathcal{G}$ が以下を満たすとする．任意の $k \in \mathbb{N}$ と $x^0 \in \mathcal{D}$ に対して，$|t-t'| < \delta_t$ ならば $\|\phi(t,x)-\phi(t',x)\| \leq K_t|t-t'|$ を満たす $\delta_t(k,x^0), K_t(k,x^0) > 0$ が存在する．ただし，$t,t' \in (\tau_k(x^0),\tau_{k+1}(x^0))$ である．また，$p \in \hat{\mathcal{S}}$ を通る $\mathcal{G}$ の N-周期軌道 $\mathcal{O} = \{x \in \mathcal{D}|\ x = \phi(t,p),\ 0 \leq t \leq T\}$ を考える．ただし，$T = \tau_{N+1}(p)$ であり $\phi(\tau_{N+1}(p),p) = p$ が成立する．

このとき，$\mathcal{O}$ が指数安定であることは，$p \in \mathcal{O} \cap \hat{\mathcal{S}}$ が一般化ポアンカレ写像 P の指数安定な平衡点であるための必要十分条件である．

証明　はじめに，定理 1 の条件が成立していることから，初期値に関する局所 Lipschitz 連続性（定義 6）と結合 Lipschitz 連続性（定義 7）との等価性条件が成立していることに注意する．この等価性条件の下で，リセット時刻近傍においては結合 Lipschitz 連続性を利用し，リセット時刻近傍を除く残りの時間区間においては初期値に関する局所 Lipschitz 連続性を利用することで，全時刻における解軌道を評価できる．この解析手法は以降の証明の全般にわたり使われる．

それではまず必要性を示す．$p \in \mathcal{O} \cap \hat{\mathcal{S}}$ が一般化ポアンカレ写像 P の指数安定な平衡点とする．$\mathcal{S}_p := \{x \in \mathcal{D}|\ x = \phi(\tau_l(p),p) =: p_l,\ l = 1,\cdots,N\}$ を定義する．ここで，$p_1 = p$ であることに注意する．また，$p^+ := \lim_{t\to 0+}\phi(t,p)$ と表す．結合 Lipschitz 連続性より，$\hat{\delta}(p) > 0$ と $L_x, L_t > 0$ が存在して，$\|x^+ - p^+\| + |t-t'| < \hat{\delta}$ ならば $\|\phi(t,x^+) - \phi(t',p^+)\| \leq L_x\|x^+ - p^+\| + L_t|t-t'|$ が成立する．ただし，$t \in (0,\tau_1(x^+)]$, $t' \in (0,\tau_1(p^+)]$ である．$\lim_{\lambda\to 0}\underline{\tau}_1(\lambda,p^+) = \lim_{\lambda\to 0}\overline{\tau}_1(\lambda,p^+) = \tau_1(p^+)$ より，$\delta'(p^+) > 0$ を $\delta' < \frac{\hat{\delta}}{2}$ かつ，微小な正定数 μ に対して $\overline{\tau}_1(\delta',p^+) - \underline{\tau}_1(\delta',p^+) + \mu < \frac{\hat{\delta}}{2}$ となるように選ぶことができる．任意の $x^+ \in \mathcal{B}_{\delta'}(p^+)$ と $t \in [\underline{\tau}_1(\delta',p^+) - \mu, \tau_1(x^+)]$ に対して，$\|x^+ - p^+\| + |t - \tau_1(p^+)| < \hat{\delta}$ であるから，次式を得る．

$$\begin{aligned}&\|\phi(t,x^+) - \phi(\tau_1(p^+),p^+)\| \\ &\quad \leq L_x\|x^+ - p^+\| + L_t|t - \tau_1(p^+)|\end{aligned} \tag{7}$$

つぎに，$\hat{\eta} > 0$ を $\hat{\eta} < \tau_1(p^+) - \underline{\tau}_1(\delta',p^+) + \mu$ となるように選ぶ．初期値に関する局所 Lipschitz 連続性より，$\delta''(p^+) > 0$, $K''_x > 0$ が存在して以下を満たす．

$$\begin{aligned}&\|\phi(t,x^+) - \phi(t,p^+)\| \leq K''_x\|x^+ - p^+\|, \\ &\quad \forall x^+ \in \mathcal{B}_{\delta''}(p^+),\ \ \forall t \in [0,\tau_1(p^+) - \hat{\eta})\end{aligned} \tag{8}$$

ここで，(7) 式をさらに場合分けして考える．まず $\tau_1(x^+) \leq \tau_1(p^+)$ の場合は，(7) 式より，次式を得る．

$$\begin{aligned}&\|\phi(t,x^+) - \phi(t,p^+)\| \leq L_x\|x^+ - p^+\|, \\ &\forall x^+ \in \mathcal{B}_{\delta'}(p^+),\ \ \forall t \in [\underline{\tau}_1(\delta',p^+) - \mu, \tau_1(x^+)]\end{aligned} \tag{9}$$

つぎに $\tau_1(x^+) > \tau_1(p^+)$ の場合は，(7) 式より，次式を得る．

$$\begin{aligned}&\|\phi(t,x^+) - \phi(t,p^+)\| \leq L_x\|x^+ - p^+\|, \\ &\quad \forall x^+ \in \mathcal{B}_{\delta'}(p^+),\ \ \forall t \in [\underline{\tau}_1(\delta',p^+) - \mu, \tau_1(p^+)] \\ &\|\phi(t,x^+) - \phi(\tau_1(p^+),p^+)\| \\ &\qquad \leq L_x\|x^+ - p^+\| + L_t|\tau_1(x^+) - \tau_1(p^+)|, \\ &\quad \forall t \in (\tau_1(p^+),\tau_1(x^+)]\end{aligned} \tag{10}$$

仮定 2 より，$\delta_\tau(p^+) > 0$, $K_\tau > 0$ が存在して，任意の $x^+ \in \mathcal{B}_{\delta_\tau}(p^+)$ に対して，次式が成立する．

$$|\tau_1(x^+) - \tau_1(p^+)| \leq K_\tau\|x^+ - p^+\| \tag{11}$$

よって (8),(9),(10),(11) 式より，$\tilde{\delta} := \min\{\delta',\delta'',\delta_\tau\}$, $\tilde{K} := \max\{K''_x, L_x + L_tK_\tau\}$ と選ぶことで次式を得る．

$$\begin{aligned}&\mathrm{dist}(\phi(t,x^+),\mathcal{O}) \leq \tilde{K}\|x^+ - p^+\|, \\ &\quad \forall x^+ \in \mathcal{B}_{\tilde{\delta}}(p^+),\ \ \forall t \in [0,\tau_1(x^+)]\end{aligned}$$

ここで，これまでと同様の議論を用いてリセットによる軌道の遷移が局所 Lipschitz 連続，つまり，$\delta_{J1}(p) > 0$, $K_{J1} > 0$ が存在して，全ての $x \in \mathcal{B}_{\delta_{J1}}(p) \cap \mathcal{S}$ に対して $\|x^+ - p^+\| \leq K_{J1}\|x - p\|$ が成立することを示すことができる．簡単に述べると，結合 Lipschitz 連続性と仮定 2 より，$\delta_{J1}(p) > 0$ が存在して，十分小さい $\epsilon_{J1} > 0$ と任意の $x \in \mathcal{B}_{\delta_{J1}}(p) \cap \mathcal{S}$ に対して，

$$\begin{aligned}&\|\phi(\tau_1(x) + \epsilon_{J1},x) - \phi(\tau_1(p) + \epsilon_{J1},p)\| \\ &\quad \leq L_{xJ1}\|x - p\| + L_{tJ1}|\tau_1(x) - \tau_1(p)| \\ &\quad \leq (L_{xJ1} + L_{tJ1}K_{\tau J1})\|x - p\| =: K_{J1}\|x - p\|\end{aligned} \tag{12}$$

を満たす $L_{xJ1}, L_{tJ1}, K_{\tau J1} > 0$ がそれぞれ存在する．あとは (12) 式において $\epsilon_{J1} \to 0$ とすればよい．

よって，$\delta_1 := \min\{\tilde{\delta},\delta_{J1}\}$, $K_1 := \tilde{K}K_{J1}$ と定義することで，次式を得る．

$$\mathrm{dist}(\phi(t,x),\mathcal{O}) \leq K_1\|x - p\|,$$

$$\forall x \in \mathcal{B}_{\delta_1}(p) \cap \mathcal{S}, \quad \forall t \in [0, \tau_2(x)] \tag{13}$$

同様にして，$\mathcal{S}_p$ の全ての点に対して (13) 式に対応する条件を満たす近傍 δ_i と正定数 K_i，$i = 1, \cdots, N$ が存在する．$p_N \in \mathcal{S}_p$ に対しては，

$$\mathrm{dist}(\phi(t, x_N), \mathcal{O}) \le K_N \|x_N - p_N\|,$$
$$\forall x_N \in \mathcal{B}_{\delta_N}(p_N) \cap \mathcal{S}, \quad \forall t \in [0, \tau_2(x_N)]$$

を満たす $\delta_N > 0$ が存在する．つぎに $p_{N-1} \in \mathcal{S}_p$ を考え，$\max\{K_N, K_{N-1}\}$ を改めて K_{N-1} とおきなおす．ここで，$K_{N-1}\delta_{N-1} < \delta_N$ かつ次式を満たす δ_{N-1} が存在する．

$$\mathrm{dist}(\phi(t, x_{N-1}), \mathcal{O}) \le K_{N-1} \|x_{N-1} - p_{N-1}\|,$$
$$\forall x_{N-1} \in \mathcal{B}_{\delta_{N-1}}(p_{N-1}) \cap \mathcal{S}, \quad \forall t \in [0, \tau_3(x_{N-1})]$$

この操作を繰り返すことで，性質 *iii)* の半群性より，次式を満たす $\delta_1 > 0$，$K_1 > 0$ を得る．

$$\mathrm{dist}(\phi(t, x), \mathcal{O}) \le K_1 \|x - p\|,$$
$$\forall x \in \mathcal{B}_{\delta_1}(p) \cap \mathcal{S}, \quad \forall t \in [0, \tau_{N+1}(x)] \tag{14}$$

つぎに，$p \in \mathcal{S}_p$ は一般化ポアンカレ写像 (1) の指数安定な平衡点であることから，以下を満たす正定数 δ_P, a', b' が存在する．任意の $x \in \mathcal{B}_{\delta_P}(p) \cap \mathcal{S}$ と $k \in \mathbb{N}$ に対して，$\|x - p\| < \delta_P$ ならば次式が成立する．

$$\|P^{k+1}(x) - p\| = \|\phi(\tau_{(N+1)(k+1)}(x), x) - p)\|$$
$$\le a' e^{-b'(k+1)} \|x - p\| \tag{15}$$

以上の議論より，$\delta := \min\{\delta_1, \delta_P\}$ とすることで，(14),(15) 式より，$\mathrm{dist}(\phi(t, x), \mathcal{O})$ は指数関数的に 0 に収束する．

さいごに，任意の $p_{\mathcal{O}} \in \overline{\mathcal{O}}$ について考える．文献 13) より，$p \in \mathcal{O} \cap \hat{\mathcal{S}}$ が一般化ポアンカレ写像 P の指数安定な平衡点であるとき，p を通る $\mathcal{G}$ の N-周期軌道 $\mathcal{O}$ は Lyapunov 安定（定義 5 参照）である．これより，任意の $p_{\mathcal{O}} \in \overline{\mathcal{O}}$ に対して，全ての $z \in \mathcal{B}_{\delta_{p_{\mathcal{O}}}}(p_{\mathcal{O}})$ において，$m \in \mathbb{N}, 1 \le m \le N$ が存在して $\phi(\tau_m(z), z) \in \mathcal{B}_\delta(p) \cap \mathcal{S}$ を満たすような $\delta_{p_{\mathcal{O}}}(p_{\mathcal{O}}) > 0$ が存在する．ここまでの議論と性質 *iii)* の半群性より，任意の $z \in \mathcal{B}_\delta(p_{\mathcal{O}})$ に対して，$\mathrm{dist}(\phi(t, z), \mathcal{O}) \le a e^{-bt} \mathrm{dist}(z, \mathcal{O})$，$t \ge 0$ を満たす正定数 a, b が存在し，補題 1 より必要性が示された．

つぎに十分性を示す．$p \in \mathcal{S}_p$ を通る $\mathcal{G}$ の N-周期軌道 $\mathcal{O}$ が指数安定な周期軌道とする．定義 8 より，正定数 δ, a, b が存在して，$\mathrm{dist}(x^0, \mathcal{O}) < \delta$ なる任意の $x^0 \in \mathcal{D}$ において，$\mathrm{dist}(\phi(t, x^0), \mathcal{O}) \le a e^{-bt} \mathrm{dist}(x^0, \mathcal{O})$，$t \ge 0$ が成立する．また，仮定 2 より $\hat{\delta} \in (0, \delta]$ を $\mathcal{B}_{\hat{\delta}}(p)$ の中に $\mathcal{S}_p$ の要素が p のみとなるように選ぶことができる．$\mathcal{O}$ は Lyapunov 安定でもあるため，文献 13) より $p \in \mathcal{O} \cap \hat{\mathcal{S}}$ は一般化ポアンカレ写像 P の Lyapunov 安定な平衡点であり，上述の $\hat{\delta}$ に対して以下を満たす $\tilde{\delta}(\hat{\delta}) > 0$ が存在する．任意の $x \in \mathcal{B}_{\tilde{\delta}}(p) \cap \hat{\mathcal{S}}$ に対して，

$$\phi(\tau_{(N+1)(k+1)}(x), x) \in \mathcal{B}_{\hat{\delta}}(p) \cap \hat{\mathcal{S}}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{16}$$

が成立する．無限列 $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ を $t_k := \tau_{(N+1)k}(x)$ と定義すると，任意の $x \in \mathcal{B}_{\tilde{\delta}}(p) \cap \hat{\mathcal{S}}$ に対して，

$$\mathrm{dist}(\phi(t_k, x), \mathcal{O}) = \mathrm{dist}(P^k(x), \mathcal{O})$$
$$\le a e^{-bt_k} \mathrm{dist}(x, \mathcal{O}) \le a e^{-bt_k} \|x - p\| \tag{17}$$

が成立する．ここで，上記の議論から $p \in \mathcal{S}_p$ は $\mathcal{B}_{\hat{\delta}}(p) \cap \hat{\mathcal{S}}$ の中の $\mathcal{O}$ の唯一の点であることと (16) 式より，(17) 式は任意の $x \in \mathcal{B}_{\tilde{\delta}(p)} \cap \hat{\mathcal{S}}$ に対して次式を意味する．

$$\mathrm{dist}(P^k(x), p) \le a e^{-bt_k} \|x - p\| = a e^{-b\tau_{(N+1)k}(x)} \|x - p\|$$

これより，任意の $x \in \mathcal{B}_{\tilde{\delta}(p)} \cap \hat{\mathcal{S}}$ において，$\|P^k(x) - p\| \le a' e^{-b'k} \|x - p\|$ を満たす $a', b' > 0$ が存在するため，十分性が示された．以上により，題意が示された． ■

4. おわりに

本論文では左連続動的システムを対象とし，一般化ポアンカレ写像に基づく N- 周期軌道の指数安定性に関する理論的考察を行った．本論文における一つ目の結果として，従来の局所 Lipschitz 連続性に相当する新たな二つの連続性の概念を提案し，これらの等価性条件を明らかにした．この等価性条件の下で，二つの連続性に基づく解析を評価区間によって使い分けることで，異なる遷移時刻をもつハイブリッド軌道間の距離を任意の時刻にわたって評価できるようになる．そのため，この結果は左連続動的システムの解析において有用である．二つ目の結果として，この解析手法を駆使して左連続動的システムの N- 周期軌道の指数安定性と，対応する一般化ポアンカレ写像における平衡点の指数安定性との等価性条件を導出した．この結果はハイブリッド周期軌道に対する指数安定性の判定や，安定化制御器の設計に有用である．

左連続動的システムは，様々なハイブリッドシステムを内包する統一的な表現形式であり，このシステムに対する理論を構築することで，従来はそれぞれのシステムに対して個別に行われていた解析に対して統一的な手法を提供することが可能となる．筆者らは現在，センサノイズや不整地路面などの環境外乱を考慮し，歩行運動を多くの従来研究で用いられてきた微分方程式ではなく，確率微分方程式を用いた確率ハイブリッドシステムとしてモデル化した場合の制御手法を考えており，本論文の知見が利用できると期待している．

謝辞 本研究は科学研究費補助金 研究活動スタート支援 (No.22860041) の助成を受けました．ここに謝意を表します．

参 考 文 献

1) H. S. Witsenhausen : A class of hybrid-state continuous-time dynamical systems, IEEE Trans. Autom. Contr., **11**-2, 78/92 (1966). 161-167

2) 佐藤, 藤本, 玄：ハミルトン系の変分対称性に基づく１脚ロボットの最適歩容生成, 計測自動制御学会論文集, **43**-12, 1103/1110 (2007)

3) 佐藤, 藤本, 玄：不連続な状態遷移を考慮した学習最適制御による歩行軌道の生成手法, 日本ロボット学会誌, **29**-2, 90/100 (2011)

4) J. W. Grizzle, G. Abba and F. Plestan : Asymptotically stable walking for biped robots: analysis via systems with impulse effects, IEEE Trans. Autom. Contr., **46**-1, 51/64 (2001)
5) D. D. Bainov and P. S. Simeonov : Systems with Impulse Effect: Stability, Theory and Applications, Ellis Horwood Limited, England (1989)
6) L. B. Freidovich, A. S. Shiriaev and I. R. Manchester : Stability analysis and control design for an underactuated walking robot via computation of a transverse linearization, Proc. 17th IFAC World Congress, 10166/10171 (2008)
7) B. Morris and J. W. Grizzle : Hybrid invariant manifolds in systems with impulse effects with application to periodic locomotion in bipedal robots, IEEE Trans. Autom. Contr., **54**-8, 1751/1764 (2009)
8) B. Morris and J. W. Grizzle : A restricted Poincaré map for determining exponentially stable periodic orbits in systems with impulse effects: Application to bipedal robots, Proc. 44th IEEE Conf. on Decision and Control, 4199/4206 (2005)
9) M. S. Branicky : Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems, IEEE Trans. Autom. Contr., **43**-4, 475/482 (1998)
10) S. Satoh and K. Fujimoto : Stabilization of time-varying stochastic port-Hamiltonian systems based on stochastic passivity, Proc. IFAC Symp. Nonlinear Control Systems, 611/616 (2010)
11) C. G. Cassandras and J. Lygeros Eds. : Stochastic Hybrid Systems, CRC Press (2006)
12) W. M. Haddad and V. Chellaboina : Dissipativity theory and stability of feedback interconnections for hybrid dynamical systems, J. Math. Prob. Engin., **7**, 299/335 (2001)
13) S. G. Nersesov, V. Chellaboina and W. M. Haddad : A generalization of Poincaré theorem to hybrid and impulsive dynamical systems, Int. J. Hybrid Systems, **2**-1, 39/55 (2002)

［著　者　紹　介］

佐　藤　訓　志（正会員）

2007 年名古屋大学大学院工学研究科博士課程前期課程修了．2009-2010 年日本学術振興会特別研究員 (DC2)．2010 年名古屋大学大学院工学研究科博士課程後期課程修了．同年より広島大学大学院工学研究院助教．2011 年 Radboud University Nijmegen 客員研究員．非線形制御の研究に従事．博士 (工学)．2008 年 IEEE Robotics Automation Society Japan Chapter Young Award, 2009 年計測自動制御学会制御部門研究奨励賞，2010 年 計測自動制御学会学術奨励賞研究奨励賞などを受賞．システム制御情報学会，日本ロボット学会，IEEE の会員．

［著　者　紹　介］

佐　伯　正　美（正会員）

1981 年，京都大学大学院工学研究科博士課程単位取得退学．同年京都大学工学部助手，82 年筑波大学電子・情報工学系講師，助教授を経て，92 年広島大学工学部第一類教授，03 年に大学院工学研究科教授となり，現在に至る．ロバスト制御系の設計の研究に従事（工学博士）．システム制御情報学会，日本機械学会，電気学会，IEEE の会員．