

力学系の性質を利用した非線形確率システムの制御

佐藤 訓志* 藤本 健治**

* 広島大学 大学院 工学研究院, 東広島市鏡山 1-4-1
 ** 名古屋大学 大学院 工学研究科, 名古屋市千種区不老町
 * Faculty of Engineering Hiroshima University, 1-4-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima, Japan
 ** Graduate School of Engineering Nagoya University, Fro-cho, Chikusa-ku, Nagoya, Japan
 * E-mail: satoh@hiroshima-u.ac.jp
 ** E-mail: fujimoto@nagoya-u.jp

キーワード：非線形確率制御 (nonlinear stochastic control), 確率安定性 (stochastic stability), 確率ハミルトン系 (stochastic Hamiltonian systems), 確率受動性 (stochastic passivity).
 JL 002/02/4202-0086 ©2002 SICE

1. はじめに

非線形の動的システムに不規則外乱が介入する非線形確率システムの制御は、一般的に難しい問題である。しかし、例えば入力アフィンシステムや厳密フィードバック形式など、システムのクラスをある程度限定することで有効な制御手法が研究されている。文献1)では入力アフィンシステムに対する制御リアプノフ関数に基づく確率安定化手法が提案され、文献2)では確率バックステッピング法による出力フィードバック制御手法が提案されている。また文献3)では、受動性の概念が確率受動性として拡張され、確定システムと同様の手法⁴⁾で確率安定化が達成されている。

一方、確定システムの分野では、制御対象を実用上重要な力学系に限定することで、受動性や不変性などの性質を陽に生かした制御手法が盛んに研究されている。これについては例えば文献5)を参照頂きたい。力学系の挙動を記述する表現形式の一つとして、ポート・ハミルトン形式^{6),7)}が提案され、機械系だけでなく、受動的な電気回路や非ホロノミックシステムなども表現できる。著者らのアプローチは、非線形確率システムのクラスである確率力学系に対して、力学系特有の性質を積極的に利用することで、効果的な制御手法を提案することである。まず、確定ポート・ハミルトン系を確率ポート・ハミルトン系へ拡張^(注1)、この系が確率受動性や変換に対する不変性を有するための条件を明らかにした。さらに、この二つの性質を利用して、外乱の影響を定量的に考慮した系統的な安定化手法を提案した⁹⁾。ハミルトン系にフィードバックを施した閉ループ系は、一般的にハミルトン系の構造を保存しない。そこで、ここでは変換に対する不変性として、確定ハミルトン系における一般化正準変換¹⁰⁾の拡張であり、確率ポート・ハミルトン系の性質を保存する特別な座標変換とフィードバック変換の組である確率一般化正準変換を提案している。著者らの安定化手法を簡単に述べると、確率受動的とは限らない制御対象(図1左)に確率一般化正準変換を施し、確率受動性をもつ新たな確率ハミルトン系に変換した後(図

1右), 出力の直結フィードバックにより確率安定化を達成する(図2)(注2)。

本稿では、まず非線形確率システムの安定化の基礎を概説し、続いて文献9)に基づき確率ハミルトン系の安定化法を解説する。最後に、ノイズを含む機械系に対する確率有界安定性に基づく軌道追従制御手法¹¹⁾を簡単に紹介する。

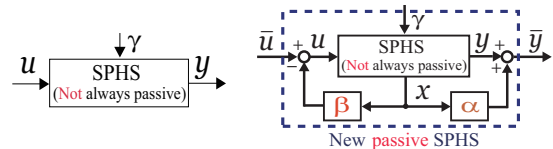


図1 確率ポート・ハミルトン系 (Stochastic Port-Hamiltonian System, SPHS) と確率一般化正準変換

u, y, γ はそれぞれシステムの入力, 出力, ノイズを表す。確率一般化正準変換により, 変換後のシステムは確率ハミルトン系の構造を保存したまま, 新たな入出力 $\bar{u}-\bar{y}$ において確率受動的となる。

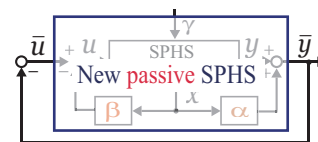


図2 直結フィードバックを施した閉ループ系。確率受動性より, 受動出力 \bar{y} の直結フィードバックによりシステムを確率安定化することが可能となる。

2. 非線形確率システムと安定化

本章では、非線形確率システムとその安定性を定義し、安定化を議論するための準備として、確率リアプノフ関数に基づく方法と確率解析の手法を簡単に紹介する。

伊藤型確率微分方程式¹²⁾で表される次のシステムを考える。

$$\begin{cases} dx = f(x, u) dt + h(x) dw, & x(0) = x^0 \\ y = s(x, u) \end{cases} \quad (1)$$

(注1)最近文献8)において、離散時間確率ハミルトン系に関する興味深い解説が報告されている。

(注2)図1(右)からもわかる通り、提案手法は元のシステムにおいては状態フィードバック補償器となることに注意されたい。

ただし, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態, $u(t), y(t) \in \mathbb{R}^m$ はそれぞれシステムの入力と出力を表す. また, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上の標準ウィーナ過程を表し, Ω は標本空間, \mathcal{F} と \mathcal{P} はそれぞれ Ω 上の σ -加法族と確率測度を表す. (Ω, \mathcal{F}) 上のフィルトレーション \mathcal{F}_t を, (1) 式の解過程 x に関して $\{x(\tau) \mid 0 \leq \tau \leq t, x(0) = x^0\}$ から生成される Ω 上の最小の σ -加法族で定義する. これらは確率論に基づく設定であり, 簡単に補足する. 確率システムでは, 初期状態 x^0 と入力 u を固定しても, ダイナミクスにウィーナ過程と呼ばれる不規則過程 $w(t)$ が内在するため, 各試行ごとに実現される解過程 (これを標本路ともいう) は異なる. ある標本路が実現する事象を ω と表したとき, その全てを含む集合を標本空間と呼び Ω と表す. 標本空間 Ω 上の σ -加法族 \mathcal{F} とは, Ω の部分集合の族で, (i) $\Omega \in \mathcal{F}$, (ii) $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^c \in \mathcal{F}$, (iii) $A_i \in \mathcal{F}, (i = 1, 2, \dots)$ ならば $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ を満たすものをいう. ただし, A^c は A の補集合を表す. フィルトレーションとは \mathcal{F} の部分 σ -加法族の増大列のことであるが, 上記で定義された \mathcal{F}_t は, 時刻 t までに得られた不確定性に関する情報だと考えてもらえばよい^(注3).

本稿では, f, h, s は十分滑らかな関数で $f(0, 0) = 0, h(0) = 0, s(0, 0) = 0$ を満たし, 任意の時刻までの解の存在と一意性を仮定する. この十分条件としては, f, h に大域的リプシッツ条件と1次増大条件を仮定すればよい^{(17), (19), (21)}. 局所リプシッツ条件を用いる場合は, 停止時刻の議論が必要になる. 詳細は文献(22), (23)を参照のこと.

確率システムにおいてよく用いられる内部安定性の指標は, (i) 確率1での安定性, (ii) p 乗モーメント安定性, (iii) 確率安定性である. これらの関係を簡単に述べると, 確率1で安定ならば確率安定であり, p 乗モーメント安定ならば確率安定である⁽²⁰⁾. 確率安定性は一番弱い指標ではあるが, 特に非線形確率システムにおいては, 確率1での安定性を保証することが困難であることと, 後述する確率リアプノフ関数に基づく解析との相性がよいことから, よく議論されている. 本稿でも5章を除いて以下で定義される確率安定性を議論する ((i), (ii) の定義は文献⁽²⁰⁾を参照のこと).

定義 1 ⁽²⁰⁾ 全ての $\epsilon, \delta > 0$ に対して, $\|x(0)\| < r(\epsilon, \delta)$ ならば $\mathcal{P}\{\sup_{t \geq 0} \|x(t)\| > \epsilon\} < \delta$ となるような $r(\epsilon, \delta) > 0$ が存在するとき, システム(1)の原点は確率安定であるという. さらに, 全ての $\epsilon > 0$ に対して, $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{P}\{\sup_{t \geq T} \|x(t)\| > \epsilon\} = 0$ となるならば, 原点は確率漸近安定であるという.

確率受動性の条件を満たさず, 3章で述べる安定化手法が適用できない場合や, 5章で扱う問題設定のように, 定常

^(注3)一般の確率論, 確率微分方程式に関する成書は文献(12)–(15)などがあるが, 入門書としては例えば文献(16)–(18)などが読みやすいかもしれない. 確率システム全般に関しては, 例えば文献(19), (20)が簡潔にまとまっている.

的に作用する外乱などによりそもそも原点が平衡点とならない場合は, 確率有界安定性の議論が有用である. ここではその指標の一つである (Q_0, Q_1, ρ) -安定性を取り上げる.

定義 2 ⁽²⁴⁾ 初期状態 $x(0)$ が $x(0) \in Q_0 \subset \mathbb{R}^n$ のとき, $\mathcal{P}\{x(t) \in Q_1 \subset \mathbb{R}^n, \text{ for } 0 \leq t < \infty\} \geq \rho$ ならば, システム(1)は (Q_0, Q_1, ρ) -安定であるという.

その他の確率有界安定性, 指数安定性, 不安定性に関する議論は, 例えば文献(23), (25), (26)を参照のこと.

以降では, 確率リアプノフ関数に基づく安定性解析の準備をする. システム(1)の解過程に沿ったスカラー関数の時間変化を計算するために, 微分生成作用素 $\mathcal{L}(\cdot)$ を定義する.

$$\mathcal{L}(\cdot) := \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} f + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \right)^\top h h^\top \right\} \quad (2)$$

(2)式第一項は確定システムにおける f に沿ったリー微分と同じだが, 確率解析ではさらに不確定性の影響を評価した第二項が現れる. これをうまく利用することで, 次章ではノイズや外乱の影響を定量的に評価した補償器の設計法を与える. このとき C^2 級関数 $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ の $x(t)$ に沿った時間変化は, 伊藤の公式⁽²⁷⁾より次式で計算できる^{(19), (20)}.

$$E\{V(x(t))\} - V(x^0) = E \left\{ \int_0^t \mathcal{L}V(x(s)) ds \right\} \quad (3)$$

ただし, (3)式右辺の $E\{\cdot\}$ は \mathcal{P} に関する期待値演算を表す. $V(0) = 0$ かつ $\mathcal{L}V \leq 0$ を満たす正定関数 $V(x)$ を確率リアプノフ関数とよぶ. ここで, 確率リアプノフ関数に基づく確率安定性の定理を示す.

定理 1 ^{(23), (24)} システム(1)を考える. 原点を含むある開近傍 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上で, $V(0) = 0$ かつ $\mathcal{L}V \leq 0$ を満たす正定関数 $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$ が存在するならば, システム(1)の原点は確率安定である. さらに, $V(x)$ が $x \in D \setminus \{0\}$ において $\mathcal{L}V < 0$ を満たすならば, 原点は確率漸近安定である.

確率リアプノフ関数に基づく安定性解析では非負優マルチンゲール^{(12), (19), (21), (28), (29)}が重要であるため, 以下に簡単に紹介する. フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{F}_t)$ において, 確率過程 $v(t) \in \mathbb{R}$ が, (i) 任意の $t \geq 0$ に対して $v(t)$ が \mathcal{F}_t 可測, (ii) $E\{v(t)\} < \infty, \forall t \geq 0$, (iii) $E\{v(\tau) | \mathcal{F}_t\} \leq v(t), \forall \tau \geq t$ を満たすとき, $v(t)$ を優マルチンゲールという^(注4). さらに $v(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ のとき, 優マルチンゲール収束定理⁽²⁸⁾より, $t \rightarrow \infty$ において $v(t)$ はほとんど確実に有界な収束値を持つ. 定理2は, 非負優マルチンゲール確率不等式と呼ばれる重要な定理である.

定理 2 ⁽²⁸⁾ $v(t) \in \mathbb{R}$ を非負優マルチンゲールとする. このとき任意の $\lambda > 0$ に対して $\mathcal{P}\{\sup_{t \geq 0} v(t) \geq \lambda\} \leq E\{v(0)\} / \lambda$ が成り立つ.

^(注4) n 次元確率過程の場合も同様に定義できる. 安定性解析では, $v(t) := V(x(t))$ として頻繁に用いられる.

定理 2 より, 確率システムのラサールの不変性原理を得る.

定理 3 ²⁴⁾ システム (1) を考える. $V(0) = 0$ かつ $\mathcal{L}V(\xi) \leq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ を満たす正定関数 $V(\xi)$ が存在するならば, (1) の解過程 $x(t)$ はほとんど確実に $\mathcal{L}V = 0$ を満たす集合内の最大不変集合に収束する.

最後に, 文献 30) では, 定理 3 を時変の場合へと拡張しており, 文献 31) では h が u の関数である場合や, 滑らかでない確率リアプノフ関数を含めた安定論の概説がある.

3. 確率ポート・ハミルトン系と安定化手法

本章では, 制御対象を適度な応用範囲をもつ確率力学系に限定する. そして, 受動性と不変性というこの系がもつ性質と, 確率解析手法に基づき, 外乱の影響を定量的に考慮した系統的な安定化補償器の設計法を与える. なお本稿では, 簡単のため時不変の場合⁹⁾のみを扱うが, 時変の場合を含むより一般的な結果は文献 32) を参照頂きたい.

ポート・ハミルトン系⁶⁾とは, 古典力学のハミルトン系に, 制御入力と摩擦項を考慮した次式のシステムである.

$$\begin{cases} \dot{x} = (J(x) - R(x)) \frac{\partial H(x)}{\partial x}^\top + g(x)u \\ y = g(x)^\top \frac{\partial H(x)}{\partial x} \end{cases} \quad (4)$$

本稿ではこのシステムを確率ポート・ハミルトン系として, 伊藤型確率微分方程式で表される確率力学系へと拡張する.

$$\begin{cases} dx = (J(x) - R(x)) \frac{\partial H(x)}{\partial x}^\top dt + g(x)u dt + h(x) dw \\ y = g(x)^\top \frac{\partial H(x)}{\partial x} \end{cases} \quad (5)$$

$x(t), u(t), y(t), g, h$ に関しては (1) 式と同様である. ハミルトン関数 $H(x) \in \mathbb{R}$ は十分滑らかな関数であり, システムの全エネルギーを表す. 構造行列 $J(x)$ は歪対称行列, 散逸行列 $R(x)$ は半正定対称行列とする. 以降は, システム (4) をハミルトン系, システム (5) を確率ハミルトン系と呼び, (漸近) 安定性は定義 1 の確率 (漸近) 安定性の意味で用いる. $[\cdot]^{-1}$ は逆行列を, それ以外の \cdot^{-1} は逆変換を表す.

これから, 本章において重要な性質である確率ハミルトン系の確率受動性と不変性を順に紹介していく. まず, ハミルトン系の受動性に関して以下の補題が知られている.

補題 1 ⁷⁾ ハミルトン関数 $H(x)$ が半正定であるとき, ポート・ハミルトン系 (4) は受動的である.

確定システムの受動性⁴⁾の拡張として, 確率受動性³⁾があり, 確率受動的な非線形システムは, 受動出力の直結フィードバックという簡単な制御則で確率安定化できる.

定義 3 ³⁾ 確率システム (1) が確率受動的であるとは, 全ての $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ で $\mathcal{L}V(x) \leq s(x, u)^\top u$ を満たす蓄積関数と呼ばれる半正定関数 $V(x)$ が存在することである.

確率ハミルトン系では, 補題 1 と同様の主張は必ずしも成り立たないため, 確率受動性に関する以下の補題を示す.

補題 2 ⁹⁾ ハミルトン関数 $H(x)$ が半正定であるとき, 確率ハミルトン系 (5) が $H(x)$ を蓄積関数として確率受動的であるための必要十分条件は次式が成立することである.

$$\frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^\top h(x) h(x)^\top \right\} \leq \frac{\partial H}{\partial x} R(x) \frac{\partial H}{\partial x}^\top \quad (6)$$

補題 2 を確定ハミルトン系 (4) に適用する. $h \equiv 0$ とすると, $R(x)$ が半正定であるため (6) 式は常に成立する. これより, 補題 2 は補題 1 の自然な拡張となっている.

ハミルトン系 (4) に何らかのフィードバックを施した閉ループ系は, 一般的にハミルトン系とはならないため, 文献 10) では, この系の性質を保存する特別な座標変換とフィードバック変換の組である一般化正準変換が提案されている. ここでは, 一般化正準変換を確率ハミルトン系 (5) へと拡張した確率一般化正準変換を定義し, この変換の下での不変性について考える (図 1 参照). さらに, 変換後のシステムが, 確率受動的となるための条件を示す (図 2 参照).

定義 4 確率ハミルトン系 (5) に対する確率一般化正準変換とは次式で与えられる変換の組であり, 変換後の座標 \bar{x} 上における入出力 $\bar{u} \mapsto \bar{y}$ のダイナミクスが, \bar{H} をハミルトン関数とする確率ハミルトン系となるものをいう.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \Phi(x), & \bar{H} &= H(x) + U(x) \\ \bar{y} &= y + \alpha(x), & \bar{u} &= u + \beta(x) \end{aligned} \quad (7)$$

ただし, $\Phi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は適当な座標変換, $U(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha(x), \beta(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ は適当な関数とする.

定理 4 ⁹⁾ 確率ハミルトン系 (5) に対して変換の組 $\Phi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, U(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \alpha(x), \beta(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が確率一般化正準変換となるための必要十分条件は, ある歪対称行列 $P(x)$ と, $R(x) + Q(x)$ が半正定対称行列となるある対称行列 $Q(x)$ が存在し, 次式を満たすことである.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial x} \right)^\top h h^\top \right\} \\ &= \frac{\partial \Phi^i}{\partial x} \left[(J - R) \frac{\partial U}{\partial x}^\top + g\beta + (P - Q) \frac{\partial (H + U)}{\partial x}^\top \right] \\ & \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (8)$$

このとき出力の変換は $\alpha(x) = g(x)^\top \frac{\partial U(x)}{\partial x}$ で与えられる.

定理4は、一般化正準変換に対する結果¹⁰⁾を特別な場合として含んでいる。最後に、補題2と定理4より、確率一般化正準変換(7)後のシステムが確率受動的であるための条件を示し、受動性と不変性に基づく安定化定理を与える。

定理5⁹⁾ 確率ハミルトン系(5)に対して、変換後のハミルトン関数 $\bar{H}(\bar{x}) := H(\Phi^{-1}(\bar{x})) + U(\Phi^{-1}(\bar{x}))$ が半正定かつある $d \geq 2$ に対して C^d 級関数となるような適当な確率一般化正準変換が存在するものとする。このとき、変換後のシステムが $\bar{H}(\bar{x})$ を蓄積関数として確率受動的であるための必要十分条件は次式で与えられる。

$$\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial(H+U)}{\partial x} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]^{-1} \right)^\top h(x) h(x)^\top \frac{\partial \Phi^\top}{\partial x} \right\} \leq \frac{\partial(H+U)}{\partial x} (R(x) + Q(x)) \frac{\partial(H+U)}{\partial x}^\top \quad (9)$$

さらにもし $\bar{H}(\bar{x})$ が正定関数であり、次式で定義される集合が $\bar{\Gamma} \cap \bar{\Pi} = \{0\}$ を満たすならば、直結フィードバック $\bar{u} = -\bar{y}$ は変換後のシステムの原点を確率漸近安定化する。

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda} &= \operatorname{span}\{\operatorname{ad}_{\bar{f}_0}^k \bar{g}_i(\bar{x}) \mid 0 \leq k \leq n-1, 1 \leq i \leq m\} \\ \bar{\Gamma} &= \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{L}_0^k \bar{H}(\bar{x}) = 0, k = 1, 2, \dots, d\} \\ \bar{\Pi} &= \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{L}_0^k L_\lambda \bar{H}(\bar{x}) = 0, \forall \lambda \in \bar{\Lambda}, \\ &\quad k = 0, 1, \dots, d-1\} \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{f}_0 := (\bar{J}(\bar{x}) - \bar{R}(\bar{x})) \frac{\partial \bar{H}(\bar{x})}{\partial \bar{x}}^\top$ であり、 \bar{g}_i は \bar{g} の i 列目を表す。また、作用素 \mathcal{L}_0 は、(2)式の \mathcal{L} において f を \bar{f}_0 で置き換えたものである。

定理5の証明には、補題2と定理3が重要な役割を果たすが、詳細は文献9)を参照頂きたい。定理5は、システムに作用する外乱の構造 h に対して、確率安定化のための補償器に関する定量的な条件を与える。逆に、確定システムの補償器をそのまま利用する場合などは、その補償器が抑制可能な外乱の構造に関する条件を与えることができる。

4. 数値例

本章では、ノイズを含む非ホロノミック系として転がるコインを考え、提案手法を適用する。図3のように、 $q := (q_1, q_2, q_3)^\top, p := (p_1, p_2)^\top, u := (u_1, u_2)^\top$ を定め、コインの半径や慣性モーメントを1に規格化すると、このシステムは $x = (q^\top, p^\top)^\top$ 、 $H = p^\top p / 2$ 、 $y = p$ とする確率ハミルトン系(5)として表される⁹⁾。ただし、ノイズのポートは $h(x) = (O_{23}, \operatorname{diag}\{h_1(x), h_2(x)\})^\top$ として、任意の状態の関数 $h_1(x), h_2(x)$ のまま解析を進める。なお、 O_{ij} は i 行 j 列の零行列、 $\operatorname{diag}\{\cdot\}$ は対角行列を表す。

本章では、非ホロノミック拘束を持つハミルトン系に対する制御器設計法³³⁾を基に、指定した不変集合

$$\bar{\Xi} := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^5 \mid \bar{q}_1 = \bar{q}_2 = 0, \bar{p}_1 = \bar{p}_2 = 0\} \quad (10)$$

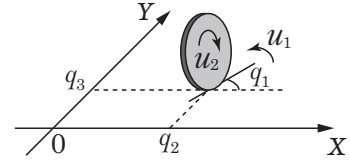


図3 転がるコイン

コインの進行方向角度を q_1 、位置を直交座標 $(X, Y) = (q_2, q_3)$ で表し、 q_1 の角運動量を p_1 、コインの進行方向の回転角運動量を p_2 で表す。入力は、 q_1 に対する回転トルクを u_1 、進行方向の回転トルクを u_2 とする。

へ状態を確率収束させる補償器の設計を目標とする。まず、新たなハミルトン関数 $\bar{H} = H + U$ を正定とするポテンシャル関数 $U(q_1^2 + q_2^2, q_3)$ を定め、 $\bar{q} := (\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x))^\top = (\tan(q_1), q_2, 2q_3 - q_2 \tan(q_1))^\top$ 、 $\bar{p} := (\Phi_4(x), \Phi_5(x))^\top = (\frac{p_1}{1 + \tan^2(q_1)}, p_2 \sqrt{1 + \tan^2(q_1)})^\top$ で定義される座標変換を施す。ポテンシャル関数 U と座標変換 $\Phi(x)$ が確率一般化正準変換となるように、定理4を用いて残りの設計パラメータである $\beta(x), P(x), Q(x)$ を定める。 $P(x) = O_{55}$ 、

$$Q(x) = \begin{pmatrix} O_{33} & O_{32} \\ O_{23} & \begin{matrix} Q_{44}(x) & Q_{45}(x) \\ Q_{45}(x) & Q_{55}(x) \end{matrix} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} O_{33} & O_{32} \\ O_{23} & \bar{Q}(x) \end{pmatrix} \quad (11)$$

として(8)式を解くと次式を得る。ただし Q_{44}, Q_{45}, Q_{55} は、(11)式の $\bar{Q}(x)$ が半正定対称行列となるように定める。

$$\begin{aligned} \beta_1(x) &= \frac{\partial U}{\partial q_1} + p_1 Q_{44} + p_2 Q_{45} \\ \beta_2(x) &= \frac{\partial U}{\partial q_2} \cos q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_3} \sin q_1 + p_1 Q_{45} + p_2 Q_{55} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $\beta(x) = (\beta_1(x), \beta_2(x))^\top$ である。このままでは、変換後のシステムは(5)式の構造を保存するが、確率受動的であるとは限らない。そこで、定理5の条件(9)を満たすように、設計の自由度として残っている $Q_{44}(x), Q_{45}(x), Q_{55}(x)$ を定める。(9)式を解くと、次式を得る。

$$\frac{1}{2} (h_1^2 + h_2^2) \leq p_1^2 Q_{44} + 2p_1 p_2 Q_{45} + p_2^2 Q_{55} \quad (13)$$

よって、ノイズのポート $h_1(x), h_2(x)$ に対して、(13)式を満たす $Q_{44}(x), Q_{45}(x), Q_{55}(x)$ が存在すれば、変換後のシステムは確率受動的となる。以降では、(13)式の等式を満たす Q_{44}, Q_{45}, Q_{55} が得られたものとして、解析を続ける。すると $\bar{u} = -\bar{y}$ により、変換後のシステムの状態を入出力零化空間 $\bar{\Pi}$ へ確率収束させることができる。元のシステムへの入力も $\alpha = g^\top \frac{\partial U}{\partial x}^\top = 0$ と計算できることから、 $u = \bar{u} = -y - \beta(x)$ と簡単に得られる。 $\bar{\Pi}$ を計算すると、 $\bar{y} = ((1 + q_1^2) \bar{p}_1, \bar{p}_2 / \sqrt{1 + q_1^2})^\top \equiv 0$ から、(10)式で指定した不変集合 $\bar{\Xi}$ と一致することがわかる。よって、ノイズが含まれる場合でも、目標を達成する補償器が得られた。

時不変連続フィードバック補償器では、非ホロノミック系の原点を漸近安定化できないことはよく知られている³⁴⁾。実際定理5の条件を確かめると、 $\mathcal{L}_0 \bar{H}(\bar{x}) = 0$ から $\bar{\Gamma} = \mathbb{R}^5$ となり $\bar{\Gamma} \cap \bar{\Pi} = \{0\}$ を満たさない。文献32)では、時変確率一般化正準変換による漸近安定化補償器を提案している。

最後に、 $h_1(x) = k_1 p_1$, $h_2(x) = k_2 p_2$, $U = 1/2 q^T q$, $Q_{44} = k_1^2/2$, $Q_{45} = 0$, $Q_{55} = k_2^2/2$, $k_1 = k_2 = 15$, 初期状態を $(0.1, 0.4, 0.2, 0, 0)$ として、文献20)の方法に従い生成したウィーナ過程を用いて行ったシミュレーション結果を示す。図4は、文献33)の手法を用いて

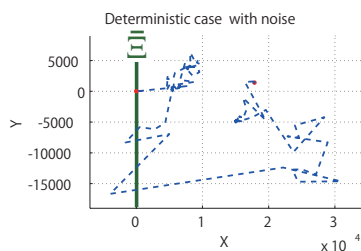


図4 外乱存在下で確定ハミルトン系に対する補償器を施した X - Y 平面上のコインの軌跡
不規則外乱がない場合では安定化が達成できることを確認したが、外乱が加わると状態が発散している。

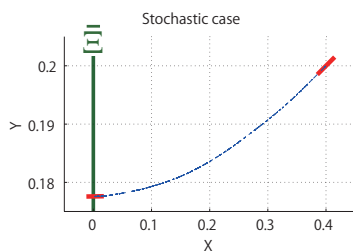


図5 同一外乱存在下で提案手法の補償器を施した X - Y 平面上のコインの軌跡
図4の場合と同じ外乱の存在下でも、目標の入出力零化集合 $\bar{\Sigma}$ への収束が達成されている。

設計した制御器 ((12) 式で $Q = O_{55}$ に相当する) を不規則外乱の下で適用した結果である。外乱がない場合 ($h = 0$) は安定化が達成できることを確認したが、外乱により状態が発散している。一方、図5は図4と同一の不規則外乱のデータに対して提案手法を用いて設計した補償器を適用した結果である。図4の場合と同じ外乱が発生しても制御目標を達成できており、提案手法の有効性を示している。

5. 確率有界安定性に基づく軌道追従制御

確率受動性の条件 (9) を満たさず、3章で述べた安定化手法が適用できない場合や、定常的に作用する外乱などによりそもそも原点が平衡点とならず、確率安定性を保証できない場合は、確率有界安定性の議論が有用である^(注5)。

(注5) 本章ではノイズのポートに関して $h(0) = 0$ である必要はない。

本章では、原点の確率有界安定化からさらに発展させた話題として、不規則雑音を含む一般的な機械系に対し (Q_0, Q_1, ρ) -安定性 (定義2) を保証する、オブザーバに基づく出力フィードバック軌道追従制御法¹¹⁾ を簡単に紹介する。この手法は、指定した確率以上で追従・推定誤差を任意の大きさに抑制するための補償器とオブザーバに関する定量的な条件を与える。具体的には、文献11)の定理1より、任意の $\lambda_1, \rho \in \mathbb{R}$, $(0 < \lambda_1, 0 < \rho < 1)$ に対して、 $0 < \lambda_0 < \lambda_1(1-\rho)$ を満たす任意の実数 λ_0 を定める。このとき追従・推定誤差 x に対して、 $Q_0^x := \{x \mid \lambda_0 < V(x) < \lambda_1(1-\rho)\}$ と $Q_1^x := \{x \mid V(x) < \lambda_1\}$ に関して、 (Q_0^x, Q_1^x, ρ) -安定となり、 $\mathcal{P} \left\{ \sup_{0 \leq t < \infty} \|x(t)\| < \sqrt{\frac{2\lambda_1}{P_M}} \right\} \geq \rho$ が保証される条件を得る。ただし、 $V(x)$ は文献11)で定義される確率リアプノフ関数であり、 P_M は $V(x)$ より決まる正定数である。図6、図7に外乱存在下での2リンクマニピュレータの軌道追従結果と、追従・推定誤差のノルム $\|x(t)\|$ の時間推移を示す。ただし、関節角度 q の目標軌道は $q_{1d} = q_{2d} := \frac{3}{4\pi} \cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) - \frac{3}{4\pi}$ とし、紙面の都合上 q_1 の結果のみを示す。

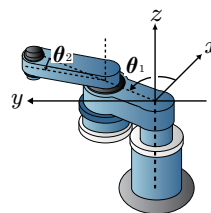


図6 2リンクロボットマニピュレータ
リンクの関節角度をそれぞれ θ_1, θ_2 とし、一般化座標を $q := (q_1, q_2)^T = (\theta_1, \theta_2)^T$ と定義する。

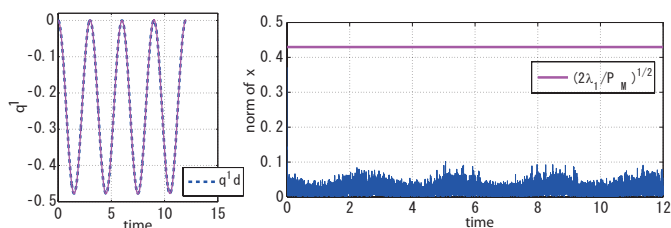


図7 q_1 の目標軌道 q_{1d} への追従結果 (左) と追従・推定誤差のノルム $\|x(t)\|$ の時間推移 (右)
外乱下でも q_1 は目標軌道 q_{1d} によく追従し、追従・推定誤差 $\|x(t)\|$ も誤差の上界 $\sqrt{\frac{2\lambda_1}{P_M}}$ で抑えられている。

6. おわりに

本稿では、まず非線形確率システムの安定化の基礎を概説した。続いて著者らの結果9), 11)に基づき、確率ハミルトン系の確率安定化法と、ノイズを含む機械系の確率有界安定性に基づく軌道追従制御手法を解説した。

非線形確率システムの制御は一般的に難しい問題であるため、システムのクラスを適切に限定し、そのクラスが有

する構造や性質を制御に積極的に活かすことは、有効なアプローチの一つと考える。これらの結果の蓄積から、より広いクラスの非線形システムを統一的に扱うことができる手法へと発展していくことを期待する。

(2003年2月28日受付)

参考文献

- 1) P. Florchinger : Feedback stabilization of affine in the control stochastic differential systems by the control Lyapunov function method, *SIAM J. Control Optim.*, **35-2**, 500/511 (1997)
- 2) H. Deng and M. Krstić : Output-feedback stochastic nonlinear stabilization, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **44-2**, 328/333 (1999)
- 3) P. Florchinger : A passive system approach to feedback stabilization of nonlinear control stochastic systems, *SIAM J. Control Optim.*, **37-6**, 1848/1864 (1999)
- 4) C. I. Byrnes, A. Isidori and J. C. Willems : Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **36-11**, 1228/1240 (1991)
- 5) 藤本: ハミルトン系システムの制御, 計測と制御, **39-2**, 99/104 (2000)
- 6) B. Maschke and A. J. van der Schaft : Port-controlled Hamiltonian systems: modelling origins and system theoretic properties, *Proc. 2nd IFAC Symp. Nonlinear Control Systems*, 282/288 (1992)
- 7) A. J. van der Schaft : L_2 -gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control, Vol. 218, *Lecture Notes on Control and Information Science*, Berlin (1996)
- 8) 赤堀 次郎: 確率システムのハミルトン系について, システム制御情報学会誌, **53-5**, 184/188 (2009)
- 9) 佐藤, 藤本: 確率ポート・ハミルトン系の受動性に基づく制御, 計測自動制御学会論文集, **44-8**, 670/677 (2008)
- 10) K. Fujimoto and T. Sugie : Canonical transformation and stabilization of generalized Hamiltonian systems, *Systems & Control Letters*, **42-3**, 217/227 (2001)
- 11) 佐藤, 藤本: オプザバにに基づく機械系の確率的軌道追従制御について, 計測自動制御学会論文集, **46-2**, 106/113 (2010)
- 12) N. Ikeda and S. Watanabe : Stochastic differential equations and diffusion processes, North-Holland/Kodansha, Amsterdam/Tokyo, second edition (1989)
- 13) 伊藤: 確率論, 岩波書店 (1953)
- 14) 長井: 確率微分方程式, 共立出版 (1999)
- 15) 舟木: 確率微分方程式, 岩波書店 (2005)
- 16) 砂原 (編): 確率システム理論 I, 朝倉書店 (1981)
- 17) 砂原 (編): 確率システム理論 II, 朝倉書店 (1982)
- 18) 岩城: 確率解析とファイナンス, 共立出版 (2008)
- 19) B. Øksendal(原著), 谷口説男 (訳): 確率微分方程式 入門から応用まで, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1999)
- 20) 大住: 確率システム入門, 朝倉書店 (2002)
- 21) I. Karatzas, S. Shreve(原著), 渡邊壽夫 (訳): ブラウン運動と確率積分, シュプリンガー・フェアラーク東京 (2001)
- 22) I. Gihman and A. Skorohod : Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag (1972)
- 23) R. Z. Has'minskii : Stochastic Stability of Differential Equations, Sijthoff and Noordhoff, Maryland, USA (1980)
- 24) H. J. Kushner : Stochastic Stability and Control, Academic Press (1967)
- 25) U. Thygesen : A survey of Lyapunov techniques for stochastic differential equations, IMM Technical Report nr. 18-1997 (1997)
- 26) R. Liu and Y. Raffoul : Boundedness and exponential stability of highly nonlinear stochastic differential equations, *Electronic J. Differential Equations*, **2009-143**, 1/10 (2009)
- 27) K. Itô : On a formula concerning stochastic differentials, *Nagoya Math. J.*, **3**, 55/65 (1951)
- 28) J. Doob : Stochastic Processes, Wiley, New York (1953)
- 29) X. Mao : Stability of Stochastic Differential Equations with Respect to Semimartingales, Pitman Res. Notes Math. Ser. 251, Longman Scientific and Technical (1991)
- 30) X. Mao : Stochastic versions of the LaSalle theorem, *J. Differential Equations*, **153**, 175/195 (1999)
- 31) 西村: 非ホロノミックシステムに対する連続な確率安定化フィードバック則, 並列計算とロボティクス 講演資料, 10/17 (2010). SICE 先端ナチュララコンピューティングとその応用調査研究会
- 32) S. Satoh and K. Fujimoto : Passivity based control of stochastic port-Hamiltonian systems, Submitted to *IEEE Trans. Autom. Contr.* (2010)
- 33) 藤本, 杉江: 一般化正準変換を用いたあるクラスの非ホロノミック系の安定化, 計測自動制御学会論文集, **36-9**, 749/756 (2000)
- 34) R. B. Brockett : Asymptotic stability and feedback stabilization, *Differential Geometric Control Theory* (Eds. by R. W. Brockett, R. S. Millmann and H. J. Sussmann), Birkhäuser, Basel-Boston, 181/191 (1983)

[著者紹介]

佐藤 訓志



2007年名古屋大学大学院工学研究科博士課程前期課程修了。2009-2010年日本学術振興会特別研究員(DC2)。2010年名古屋大学大学院工学研究科博士課程後期課程修了。同年より広島大学大学院工学研究院助教。2011年ナイメーヘン大学客員研究員。非線形制御の研究に従事。博士(工学)。2008年IEEE Robotics Automation Society Japan Chapter Young Award, 2009年計測自動制御学会制御部門研究奨励賞, 2010年計測自動制御学会学術奨励賞研究奨励賞などを受賞。IEEE, 計測自動制御学会, システム制御情報学会, 日本ロボット学会の会員。

[著者紹介]

藤本 健治



1996年京都大学大学院工学研究科修士課程応用システム科学専攻修了。1997年同大学院博士後期課程を中途退学。1997年京都大学大学院工学研究科助手等を経て, 2007年より名古屋大学大学院工学研究科准教授。1999年オーストラリア国立大学客員研究員, 1999-2000年および2002年デルフト工科大学客員研究員。非線形制御の研究に従事。博士(情報学)。IEEE, 計測自動制御学会, システム制御情報学会, 日本機械学会, 日本鉄鋼協会の会員。