

変分対称性を利用したハミルトン系の繰返し制御について[†]

藤本 健治*・佐藤 訓志*

On repetitive control of Hamiltonian systems based on variational symmetry

Kenji FUJIMOTO* and Satoshi SATOH*

In this paper, a repetitive control scheme for a class of Hamiltonian control systems is proposed. The proposed method is based on the symmetric property of the variational systems of Hamiltonian systems. It does not require precise knowledge of the plant system. A repetitive control framework is proposed to solve an optimal control problem with a certain cost function generating a periodic optimal trajectory. In addition, numerical simulations of a 2-link robot manipulator demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key Words: Repetitive control, Iterative learning control, Hamiltonian systems, Nonlinear control

1. はじめに

ある目標出力を実現するような目標入力を求める問題を、試行実験を繰り返して解く学習的手法、例えば反復学習制御^{1)~4)}や繰返し制御⁵⁾に関する多くの研究がなされている。筆者らはハミルトン系の変分対称性を利用した反復学習制御法を提案しており⁶⁾、この手法は、制御対象の詳細な情報が必要とせず、軌道追従だけでなく、ある種の最適制御を実現できる⁷⁾という大きな利点を持つ。

反復学習制御では、目標軌道が有限時間区間で定義され、各試行実験における初期状態は同一であると仮定されている²⁾。一方、繰返し制御では目標軌道は周期軌道であり、繰返し制御を1周期ごとに試行実験を行う反復学習制御だとみなすと、各試行が連続して行われることになる。よって各試行で初期状態が異なるため、反復学習制御のアルゴリズムを繰返し制御問題に適用することはできない。そこで本論文では、ハミルトン系の変分対称性に基づく反復学習制御手法を拡張して、繰返し制御問題に適用できる方法を提案する。具体的には、先に述べた初期状態の変動を考慮した入力の更新則を考え、さらに状態調整時間という待ち時間を導入する。これにより各周期の初期状態の変動を常に有界な領域に閉じ込めることで、反復学習制御のアルゴリズムを適用可能にする。さらに、シミュレーションを行い本手法の有効性を確認する。本手法は、従来の反復学習制御では扱うことができなかった周

期的な目標軌道を考慮することができ、さらに、従来の繰返し制御手法では考えられていなかった、ある種の最適制御を実現することも可能になる。

2. 変分対称性を利用した反復学習制御

筆者らが提案している反復学習制御法⁶⁾を簡単に述べる。

2.1 ハミルトン系と変分対称性

制御対象は、次式で表されるハミルトン系である。

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = (J - R) \frac{\partial H(x, u, t)^T}{\partial x}, & x(t^0) = x^0 \\ y = -\frac{\partial H(x, u, t)^T}{\partial u} \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t), y(t) \in \mathbb{R}^m$ はそれぞれシステムの状態、入力、出力を表す。また、 $H(x, u, t) \in \mathbb{R}$ はハミルトン関数であり、 $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は歪対称行列、 $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は半正定対称行列である。本論文では、初期状態 x^0 を固定したときの系を $\Sigma: u \mapsto y$ の作用素 ($\Sigma: L_2^m[t^0, t^1] \rightarrow L_2^m[t^0, t^1]$) ととらえる。

(注意) ⁶⁾ 式(1)で表されるハミルトン系の変分随伴系 $(d\Sigma)^*$ は、適当な条件の下で式(2)の変分対称性が成立し、入出力信号が適当な入力 \bar{u} を用いて制御対象の入出力信号から生成できる。

$$\begin{aligned} (d\Sigma(u))^*(v) &= \mathcal{R} \circ (d\Sigma(\bar{u})) \circ \mathcal{R}(v) \\ &\approx \mathcal{R}(\Sigma(\bar{u} + \mathcal{R}(v)) - \Sigma(\bar{u})) \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 \mathcal{R} は時間区間 $[t^0, t^1]$ 上での時間反転作用素を表し、 $\mathcal{R}(u)(t - t^0) = u(t^1 - t)$, $\forall t \in [t^0, t^1]$. で定義される。

2.2 勾配法を用いた入力の更新則

式(1)の制御対象 $\Sigma: L_2^m[t^0, t^1] \rightarrow L_2^m[t^0, t^1]$ と、評価関

[†] 第49回システム制御情報学会研究発表講演会で一部発表(2005.5)

* 名古屋大学 大学院 工学研究科

* Department of Mechanical Science and Engineering, Graduate School of Engineering, Nagoya University, Fro-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603, Japan

Table 1 Notations

表記	定義
L	周期
$t_{(i)}^0$	i 周期目の開始時間
$t_{(i)}^L$	i 周期目の終端時間 ($t_{(i)}^L = t_{(i)}^0 + L$)
$y_{(i)}$	i 周期の出力
$x_{(i)}^0$	i 周期の初期状態
$x_{(i)}^L$	i 周期の終端状態
b	各周期の初期状態の変動の上限
$\Delta t_{(i)}(b)$	i 周期の状態調整時間 (以後 $\Delta t_{(i)}$ と表記)

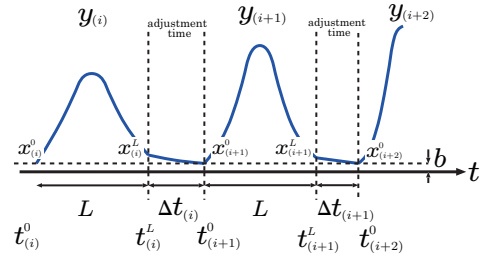


Fig. 1 Illustration of the proposed method

数 $\Gamma : L_2^m[t^0, t^1] \times L_2^m[t^0, t^1] \rightarrow \mathbb{R}$ を考える. ここで目的は, 勾配法を用いてこの評価関数 $\Gamma(u, y)$ を最小化する入力 u を求めることであり, 次式のように勾配を求める.

$$\begin{aligned} d(\Gamma(u, y))(du, dy) &= \langle \nabla_u \Gamma(u, y), du \rangle_U + \langle \nabla_y \Gamma(u, y), dy \rangle_Y \\ &= \langle \nabla_u \Gamma(u, y) + (d\Sigma(u))^* \nabla_y \Gamma(u, y), du \rangle_U \\ &=: \langle \Gamma'_u, du \rangle_U \end{aligned}$$

ただし, $\nabla_u \Gamma(u, y), \nabla_y \Gamma(u, y)$ はそれぞれ評価関数の u, y に関する勾配を表している. よって, 入力を次式のように更新すれば評価関数の値を最も減少させることができる.

$$u_{(i+1)} = u_{(i)} - K_{(i)} \Gamma'_u \Big|_{u=u_{(i)}, y=y_{(i)}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

ここで, 添字 i は i 回目の試行実験, $K_{(i)}$ は適当な正のゲインを表す. 式 (2) の変分対称性を利用した, 変分随伴系の計算を含まない入力の更新則は次式となる⁶⁾.

$$u_{(2i+1)} = u_{(2i)} + \mathcal{R}(\nabla_y \Gamma(u_{(2i)}, y_{(2i)})) \quad (4)$$

$$u_{(2i+2)} = u_{(2i)} - K_{(2i)} (\nabla_u \Gamma(u_{(2i)}, y_{(2i)}) + \mathcal{R}(y_{(2i+1)} - y_{(2i)})) \quad (5)$$

3. 変分対称性を利用した繰返し制御法への拡張

本論文では, 繰返し制御を 1 周期ごとに試行実験を連続して行う反復学習制御だと見なして, 各周期に対して入力を更新し, 出力を目標軌道に近づける. しかしながら各周期の初期状態の変動が問題となり, 前節のアルゴリズムをそのまま適用できない. そこで状態調整時間という待ち時間を導入し, 各周期の初期状態の変動を制限する. **Table 1** に本論文で用いる表記の定義を示すが, アルゴリズムの詳細は次節以降で述べる. 本論文では以下の仮定を置く.

【仮定 1】 制御対象はあらかじめ, 一般化正準変換を施し原点を指数漸近安定化してあるものとする.

一般に学習で得られたフィードフォワード入力は, ローカルフィードバックにより系を漸近安定化した後, 参照入力として与えられる. ハミルトン系の構造を保存するフィードバック変換を一般化正準変換⁸⁾といい, 機械系であれば PD フィードバックがこれにあたる.

【仮定 2】 目標軌道 y^d は状態空間の原点を通る周期 L の周

期関数であり, 1 周期区間において式 (2) が成立し, 文献 6) の反復学習制御が達成できるものとする.

仮定 2 を満たすには, 例えば 1 周期区間において時間対称な軌道が考えられる. 条件の詳細は文献 6) を参照のこと.

3.1 状態調整時間の導入

本節では状態調整時間という待ち時間を導入し, 仮定 1 の原点が指数漸近安定であることを利用して, そのあいだ入力 u を 0 とすることで, 各周期の初期状態の変動を制限する.

i 周期の終端時刻, つまり $t = t_{(i)}^L$ から $\Delta t_{(i)}$ の時間 $u \equiv 0$ とする. ここで $\Delta t_{(i)}$ は, 次式を満たす最小のものである.

$$\|x(t_{(i)}^L + \Delta t_{(i)})\| \leq b \quad (6)$$

ただし, 変動の上限を表す定数 b ($0 < b \ll 1$) は適当に定める. この $\Delta t_{(i)}$ を状態調整時間とよぶ.

Fig. 1 のように, 状態調整時間を経た後に次の周期の入力 $u_{(i+1)}$ を与えることで, 全ての周期の初期状態を原点中心の半径 b の球領域に閉じ込めることができる.

3.2 初期状態の変動を考慮した入力の更新則

繰返し制御を 1 周期ごとに試行実験を行う反復学習制御だと見なすと, 初期状態 x^0 が各周期で一定ではないことから, 式 (3) と同様に入力を更新しても, 勾配は初期状態 x^0 と式 (6) で定めた変動の上限 b に依存して真の最急降下方向からずれることになる. 今 Γ'_u, Γ'_{x^0} をそれぞれ, 評価関数の入力と初期状態に関する勾配を表す関数であるとする. 評価関数の変化は $\langle \Gamma'_u, du \rangle_{L_2} + \langle \Gamma'_{x^0}, dx^0 \rangle_{\mathbb{R}^n} \leq -K \|\Gamma'_u\|_{L_2}^2 + b \|\Gamma'_{x^0}\|$ と書くことができる. 更新が進むにつれて, $\|\Gamma'_u\|_{L_2}^2$ は減少していくが, $\|\Gamma'_{x^0}\|_{\mathbb{R}^n}$ は減少するわけではない. そのため十分周期が進むと $b \|\Gamma'_{x^0}\|_{\mathbb{R}^n} \geq K \|\Gamma'_u\|_{L_2}^2$ となり, 減少していた評価関数が増加しはじめることが起こり得る. そこで, b を定数ではなく $b_{(i)}$ として, 評価関数が増加した周期 i で $b_{(i)}$ を小さい値に更新することで, 仮定 2 より反復学習制御で得られる最適軌道に評価関数の値を任意に近づけることができる.

3.3 入力更新のアルゴリズム

本論文で提案するアルゴリズムをまとめる. ただし, 初期入力 $u_{(0)} \equiv 0$ であり, 変動の上限 $b_{(0)}$ と, 正のゲイン $K_{b(\cdot)} < 1, K_{(\cdot)}$ は適当に定めるものとし, $i = 0$ から始める.

Step 1 $2i+1$ 周期 ($t_{(2i+1)}^0 \leq t \leq t_{(2i+1)}^L$) の間, 式 (4) を用いて生成した $u_{(2i+1)}$ を入力する.

Step 2 $\|x(t_{(2i+1)}^L + \Delta t_{(2i+1)})\| \leq b_{(i)}$ となるまでの最小の

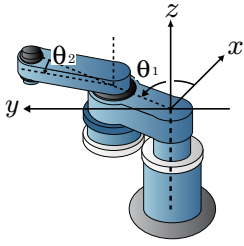


Fig. 2 2-link manipulator

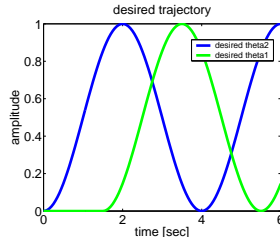
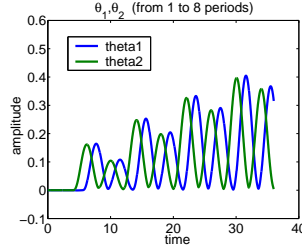
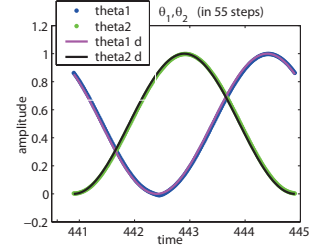


Fig. 3 Desired trajectory

Fig. 4 θ_1, θ_2 (1 to 8 periods)Fig. 5 θ_1, θ_2 (in 55 steps)

時間 $\Delta t_{(2i+1)}$ の間, 入力を $u \equiv 0$ とする.

Step 3 $t_{(2i+2)}^0 := t_{(2i+1)}^L + \Delta t_{(2i+1)}$ とし, $2i+2$ 周期の間, 式 (5) を用いて生成した $u_{(2i+2)}$ を入力する.

Step 4 Step 2 と同様に $\|x(t_{(2i+2)}^L + \Delta t_{(2i+2)})\| \leq b_{(i)}$ となるまでの時間 $\Delta t_{(2i+2)}$ の間, 入力を $u \equiv 0$ として i 回目の学習を完了する.

Step 5 $\Gamma(u_{(2i)}, y_{(2i)}) \geq \Gamma(u_{(2i+2)}, y_{(2i+2)})$ ならば, $b_{(i+1)} = b_{(i)}$, そうでなければ $b_{(i+1)} = Kb_{(i)}$ とする. $t_{(2i+3)}^0 := t_{(2i+2)}^L + \Delta t_{(2i+2)}$, $i = i+1$ として, Step 1 へ.

4. シミュレーション結果

本節では, Fig. 2 のような 2 リンクマニピュレータを考える. この系は出力 $y := (\theta_1, \theta_2)^T$ を持つ式 (1) のハミルトン系で表されるが, 詳細は文献 6) に準ずるものとし, 紙面の都合上省略する. 本節では提案手法の有効性を示すため, Fig. 3 のように式 (7) で定義される θ_1 と θ_2 が運動を始める時刻に時間差があるような目標軌道 $y^d = (\theta_1^d, \theta_2^d)^T$ を考える.

$$\theta_1^d(t) := \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2}(t-1) + \frac{1}{2} \quad (7)$$

$$\theta_2^d(t) := \begin{cases} 0 & (0 \leq t < \frac{3}{8}L) \\ \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2}(t-1 - \frac{3}{8}L) + \frac{1}{2} & (t \geq \frac{3}{8}L) \end{cases}$$

用いた評価関数は $\Gamma(y) = \frac{1}{2} \|y - y^d\|_{L_2}^2$ であり, 入力の更新則は次式となるが, 導出の詳細は文献 6) を参照のこと.

$$u_{(2i+1)} = u_{(2i)} + \mathcal{R}\{(y_{(2i)} - y^d)\}$$

$$u_{(2i+2)} = u_{(2i)} - K_{(i)} \mathcal{R}(y_{(2i+1)} - y_{(2i)})$$

Fig. 4 は, 8 周期までの関節角 θ_1, θ_2 の軌道を表している. Fig. 5 は, 55 ステップ目の関節角の軌道とそれぞれの目標軌道を表している. Fig. 6 は評価関数の値が単調に減少しており, 速やかに目標軌道に収束していることを示している. また, Fig. 7 は各周期の状態調整時間 $\Delta t_{(i)}$ であり, 55 周期以降では $\Delta t = 0$ となっており, 周期 4[s] の周期軌道に収束したことがわかる.

また, 本手法の最適制御問題への適用結果は, 文献 9) で報告している.

5. おわりに

本論文では, ハミルトン系の変分対称性を利用した繰返し

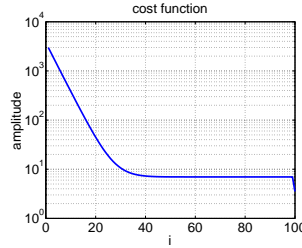
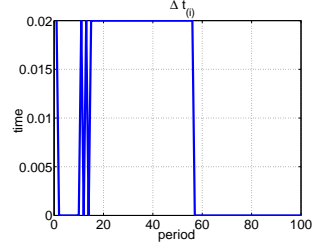


Fig. 6 Cost function

Fig. 7 $\Delta t_{(i)}$

制御法を提案した. 本手法は制御対象の詳細な情報を必要とせず, 繰返し制御の枠組みで, 軌道追従だけでなくある種の最適制御が実現できる. またシミュレーションにより, 本制御法の有効性を確認した. 最期に, 筆者らは変分対称性を利用した反復学習制御による, 1 脚ロボットの最適走行軌道の生成を行い一定の成果を得ている¹⁰⁾が, 一般的に走行軌道は周期軌道であるため, 本論文で提案した繰返し制御の枠組みへの拡張が有効であることが期待される.

参考文献

- 1) 内山 勝: 試行による人工の手の高速運動パターンの形成, 計測自動制御学会論文集, **14-6**, 706/712 (1978)
- 2) 川村, 宮崎, 有本: 動的システムの学習的制御法 (Betterment Process) の提案, 計測自動制御学会論文集, **22-1**, 56/62 (1986)
- 3) 古田, 山北: 線形多変数システムに対する学習制御系設計, 計測自動制御学会論文集, **22-12**, 1248/1255 (1986)
- 4) 十河, 足立: 線形システムに対する学習制御方式について, システム制御情報学会論文集, **7-9**, 339/346 (1994)
- 5) 中野, 井上, 山本, 原: 繰返し制御, 社団法人計測自動制御学会 (1989)
- 6) K. Fujimoto and T. Sugie: Iterative learning control of Hamiltonian systems: I/O based optimal control approach, IEEE Trans. Autom. Contr., **48-10**, 1756/1761 (2003)
- 7) K. Fujimoto, T. Horiuchi and T. Sugie: Optimal control of Hamiltonian systems with input constraints via iterative learning, Proc. 42nd IEEE Conf. on Decision and Control, 4387/4392 (2003)
- 8) K. Fujimoto and T. Sugie: Canonical transformation and stabilization of generalized Hamiltonian systems, Systems & Control Letters, **42-3**, 217/227 (2001)
- 9) 佐藤, 藤本, 玄: ハミルトン系の繰返し制御に関する一考察, 第 49 回システム制御情報学会 研究発表講演会予稿集, 431/432 (2005)
- 10) S. Satoh, K. Fujimoto and S. Hyon: Gait generation for passive running via iterative learning control, Proc. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 5907/5912 (2006)